

Инженерная и компьютерная графика

6 семестр (диф.зачет)

Лектор:

Таранцев Игорь Геннадьевич
Доцент ФИТ НГУ, ИАиЭ, «СофтЛаб-НСК»

Создатели курса:

Дебелов Виктор Алексеевич
Валеев Тагир Фаридович
Козлов Дмитрий Сергеевич

Лекция №7

Задание форм кривых и поверхностей

Задачи

- *Задача 1*: восстановление формы кривой. Имеем несколько точек на плоскости или в пространстве. Требуется построить кривую, *проходящую через эти точки* и удовлетворяющую некоторым определенным условиям. Другими словами, это задача интерполяции.
- *Задача 2*: сжатие данных о кривой. Имеем кривую, надо выбрать на ней несколько точек, по которым мы можем *достаточно хорошо восстановить* исходную кривую.
- Информацию по интерполяции можно получить на соответствующем курсе/спецкурсе.
- Немного о сплайнах

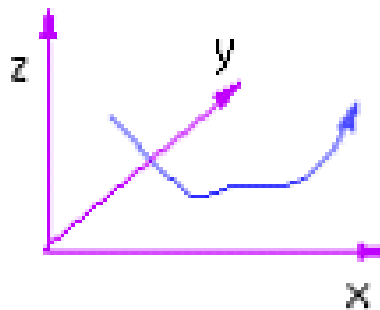
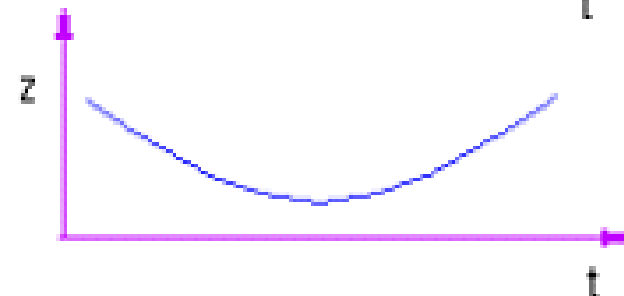
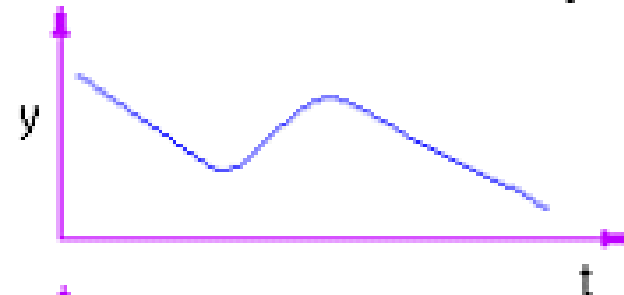
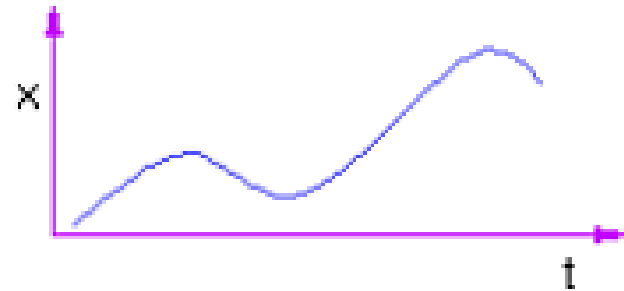
Параметрические кривые

Независимо 2D или 3D

$$r(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \quad t \in [a, b]$$

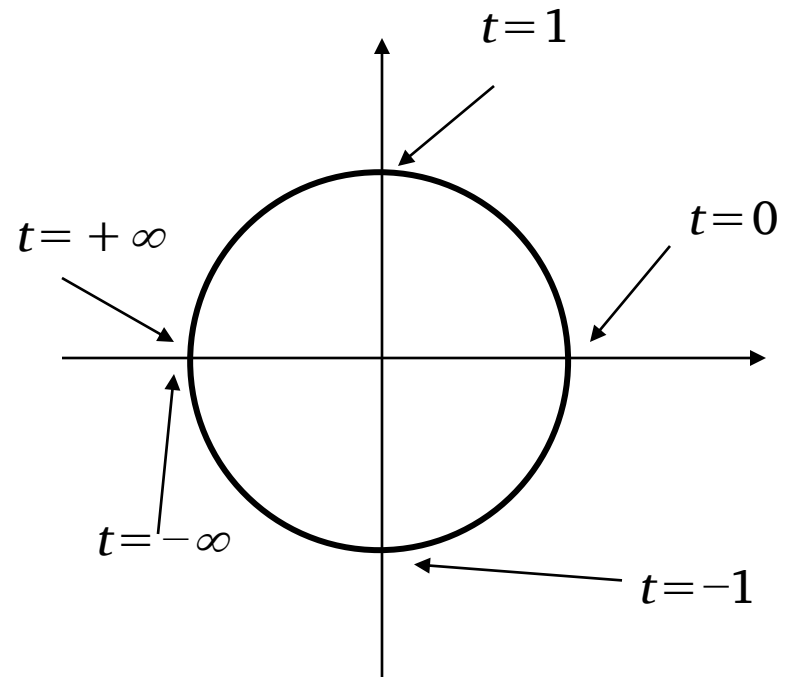
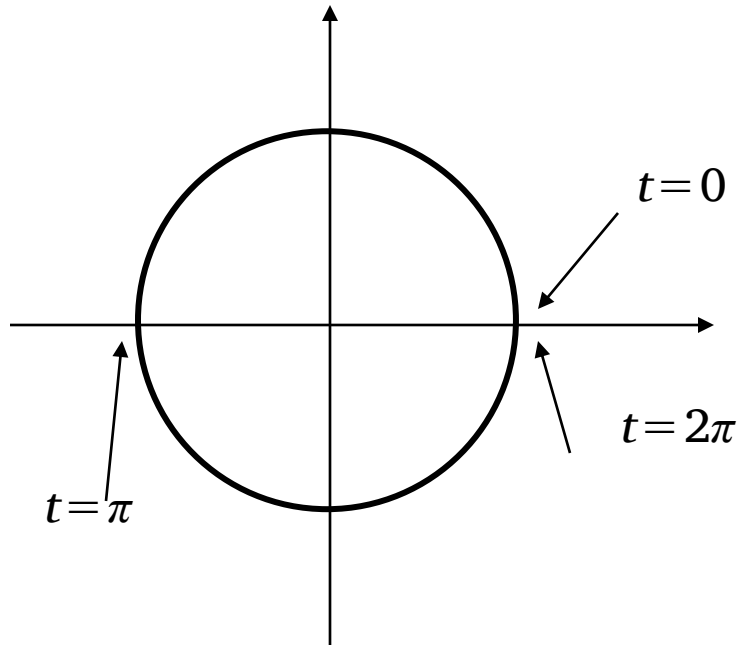
$$r'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$$

$$l(a, b) = \int_a^b |r'(t)| dt$$



Плохие и хорошие параметризации

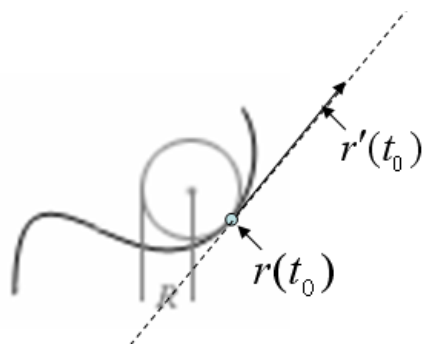
$$r(t) = a \cos(t) \bar{i} + a \sin(t) \bar{j}$$



$$r(t) = a \frac{1-t^2}{1+t^2} \bar{i} + a \frac{2at}{1+t^2} \bar{j}$$

Кривизна и кручение

- Кривизна



$$k_1 = \frac{1}{R}$$

$$k_1^2 = \frac{|r' \times r''|^2}{|r'|^3}$$

$$k_1^2 = \frac{(x'' \cdot y' - x' \cdot y'')^2}{(x'^2 + y'^2)^3} \quad \text{— 2D}$$

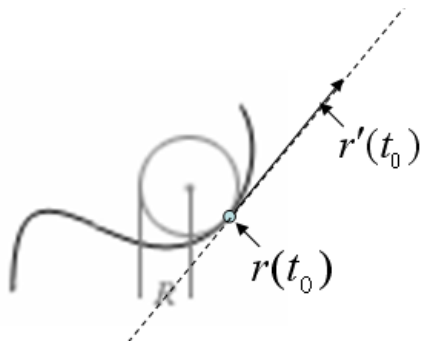
$$k_1^2 = \frac{\begin{vmatrix} x'' & y'' \\ x' & y' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y'' & z'' \\ y' & z' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z'' & x'' \\ z' & x' \end{vmatrix}}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^3} \quad \text{— 3D}$$

$$y = f(x) \quad \longrightarrow \quad k_1^2 = \frac{y''^2}{(1 + y'^2)^3}$$

$r'' = 0 \quad \longrightarrow \quad$ Кривизны нет (прямая)

Кривизна и кручение

- Кручение



$$k_2(t) = \frac{(r', r'', r''')}{|r' \times r''|^2}$$

$$(r', r'', r''') = (r', r'' \times r''')$$

Смешанное произведение векторов

$r''' = 0 \longrightarrow$ Кручения нет (плоская кривая)

Построение участка кривой

Рассмотрим методы построения формы параметрической кривой на основе:

- а) визуальной обратной связи;
- б) локальной модификации/конструирования кривой

$$x(t) = a_x t^3 + b_x t^2 + c_x t + d_x$$

$$y(t) = a_y t^3 + b_y t^2 + c_y t + d_y \quad t \in [0,1]$$

$$z(t) = a_z t^3 + b_z t^2 + c_z t + d_z$$

Надо 12 условий

Почему кубическая?

Сегмент в форме Эрмита

$$x(t) = a_x t^3 + b_x t^2 + c_x t + d_x$$



$$t \in [0, 1]$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}_x = TC_x$$

$$x(0) = P_{1x}$$

$$x(1) = P_{4x}$$

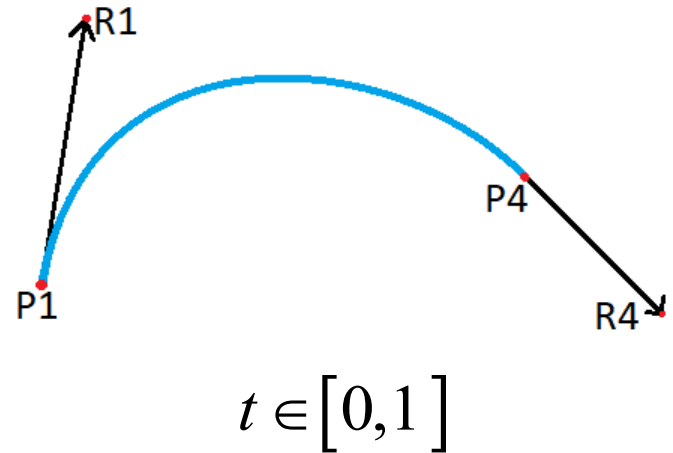
Надо еще 6 условий

Сегмент в форме Эрмита

$$x(t) = a_x t^3 + b_x t^2 + c_x t + d_x$$

$$\frac{dx}{dt} = 3a_x t^2 + 2b_x t + c_x$$

$$x'(t) = \begin{bmatrix} 3t^2 & 2t & 1 & 0 \end{bmatrix} C_x$$



УГЛЫ НАКЛОНА

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\frac{dz}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$x(0) = P_{1x} \quad x'(0) = R_{1x}$$

$$x(1) = P_{4x} \quad x'(1) = R_{4x}$$

Сегмент в форме Эрмита

$$x(0) = P_{1x} \quad x'(0) = R_{1x}$$

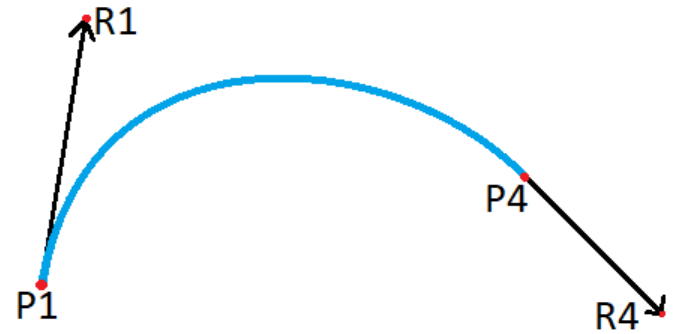
$$x(1) = P_{4x} \quad x'(1) = R_{4x}$$

$$P_{1x} = x(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 1] C_x$$

$$P_{4x} = x(1) = [1 \ 1 \ 1 \ 1] C_x$$

$$R_{1x} = x'(0) = [0 \ 0 \ 1 \ 0] C_x$$

$$R_{4x} = x'(1) = [3 \ 2 \ 1 \ 0] C_x$$

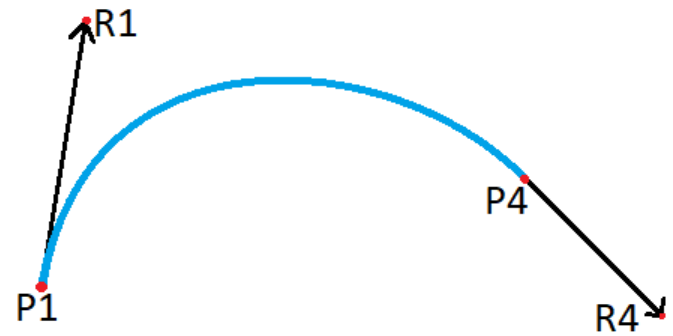


$$\begin{pmatrix} P_1 \\ P_4 \\ R_1 \\ R_4 \end{pmatrix}_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} C_x$$

Сегмент в форме Эрмита

$$x(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}_x = TC_x$$

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ P_4 \\ R_1 \\ R_4 \end{pmatrix}_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} C_x$$



Эрмитова матрица

Эрмитов геометрический вектор

$$C_x = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_4 \\ R_1 \\ R_4 \end{pmatrix}_x = M_h G_{hx}$$

$$x(t) = TM_h G_{hx},$$

$$y(t) = TM_h G_{hy},$$

$$z(t) = TM_h G_{hz}.$$

$$r(t) = TM_h G_h$$

Сегмент в форме Безье

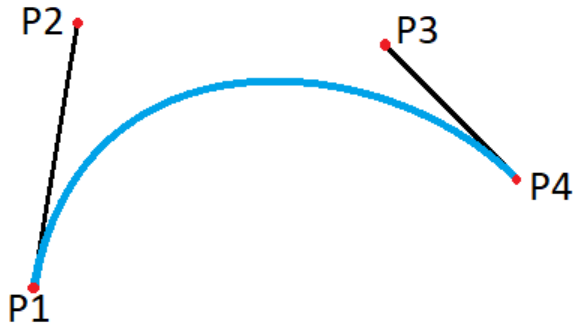
$$x(0) = P_{1x} \quad x'(0) = R_{1x}$$

$$x(1) = P_{4x} \quad x'(1) = R_{4x}$$

$$R_1 = r'(0) = 3(P_2 - P_1)$$

$$R_4 = r'(1) = 3(P_4 - P_3)$$

$$G_h = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_4 \\ R_1 \\ R_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{pmatrix} = M_{hb} G_b$$



$$x(t) = T \cdot (M_h \cdot M_{hb}) \cdot G_{bx} = T \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} G_{bx}$$

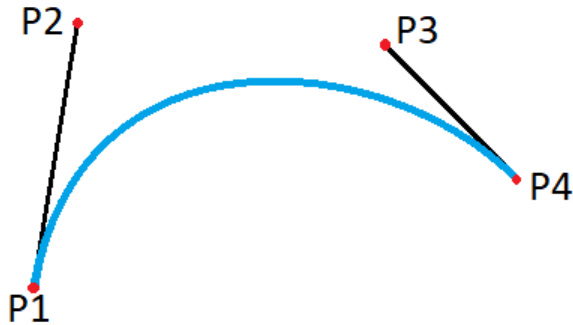
$$x(t) = TM_b G_{bx},$$

$$y(t) = TM_b G_{by},$$

$$z(t) = TM_b G_{bz}.$$

Сегмент в форме Безье

$$\begin{aligned}x(t) &= TM_b G_{bx}, \\y(t) &= TM_b G_{by}, \\z(t) &= TM_b G_{bz}.\end{aligned}\quad \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$r(t) = (1-t)^3 P_1 + 3(1-t)^2 t P_2 + 3(1-t) t^2 P_3 + t^3 P_4$$

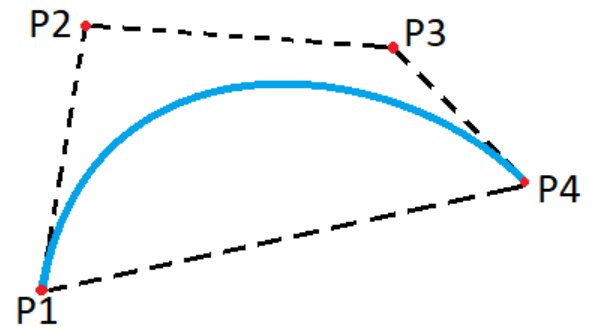
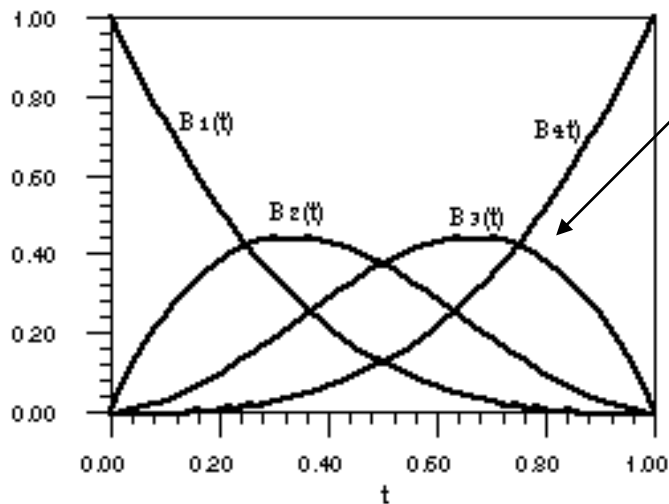
Сегмент в форме Безье

$$r(t) = \underline{(1-t)^3} P_1 + \underline{3(1-t)^2 t} P_2 + \underline{3(1-t)t^2} P_3 + \underline{t^3} P_4$$

$$(1-t)^3 + 3(1-t)^2 t + 3(1-t)t^2 + t^3 = B_1(t) + B_2(t) + B_3(t) + B_4(t) = [(1-t) + t]^3 = 1$$

Сопрягающие функции
полиномы Бернштейна

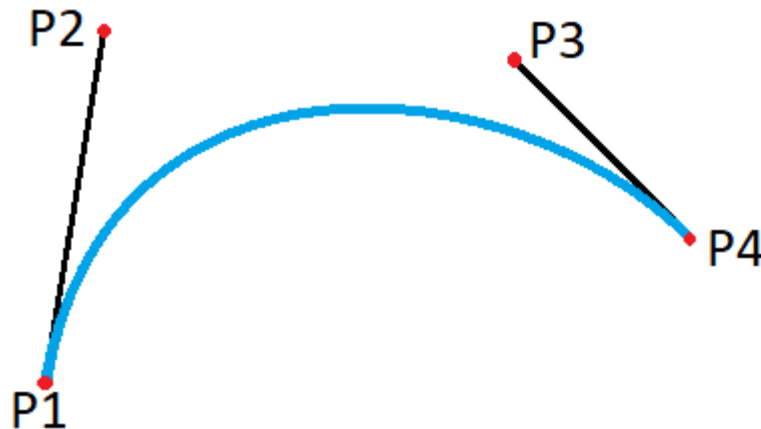
$$t \in [0, 1]$$



Сегмент в форме Безье

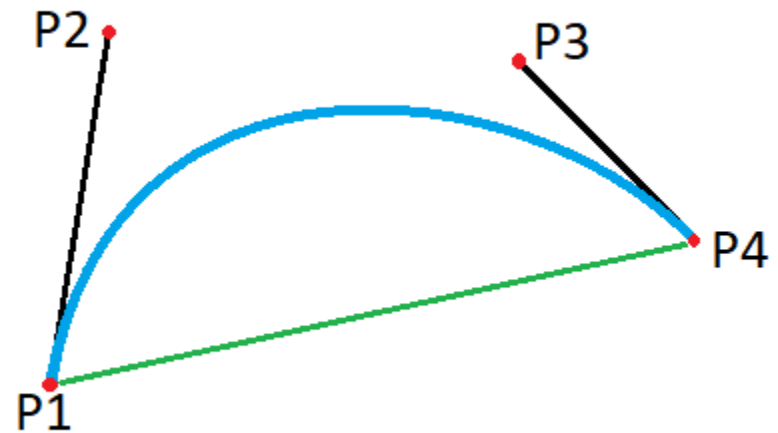
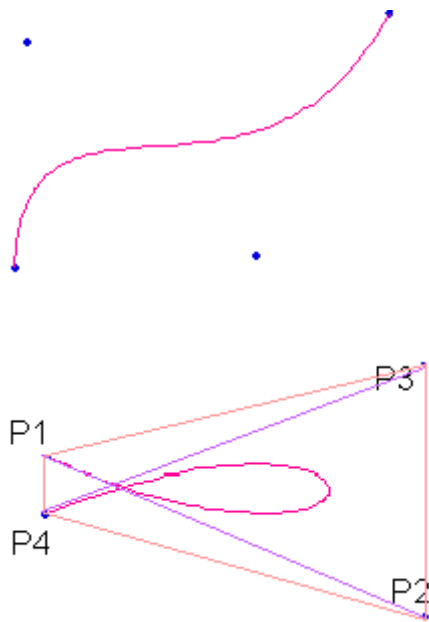
$$r(t) = (1-t)^3 P_1 + 3(1-t)^2 t P_2 + 3(1-t)t^2 P_3 + t^3 P_4 \quad t \in [0,1]$$

- а) более удобна для интерактивной работы, чем Эрмитова форма;
- б) проще осуществлять габаритные тесты;
- в) форма Безье применяется для проектирования шрифтов;
- г) применяются более высокие порядки полиномов Безье;
- д) куски перепараметризуются к каноническому виду



Условие наличия самопересечений

Было предложено (Форрест 1968), чтобы отрезки P_1P_2 и P_3P_4 не превышали хорды P_1P_4 , тогда петель на куске не будет.



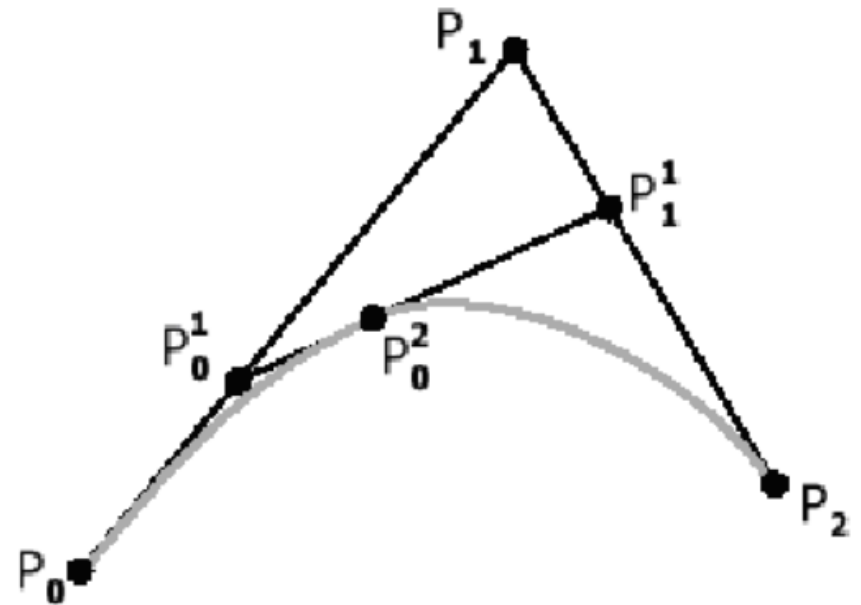
Вычисление точки геометрически (2D, 3 точки)

$$P_0^1 = (1-t)P_0 + tP_1$$

$$P_1^1 = (1-t)P_1 + tP_2$$

$$P_0^2 = (1-t)P_0^1 + tP_1^1 =$$

$$(1-t)^2 P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2 P_2$$



Вычисление точки геометрически (3D, 4 точки)

$$P_0^1 = (1-t)P_0 + tP_1$$

$$P_1^1 = (1-t)P_1 + tP_2$$

$$P_2^1 = (1-t)P_2 + tP_3$$

$$P_0^2 = (1-t)P_0^1 + tP_1^1 =$$

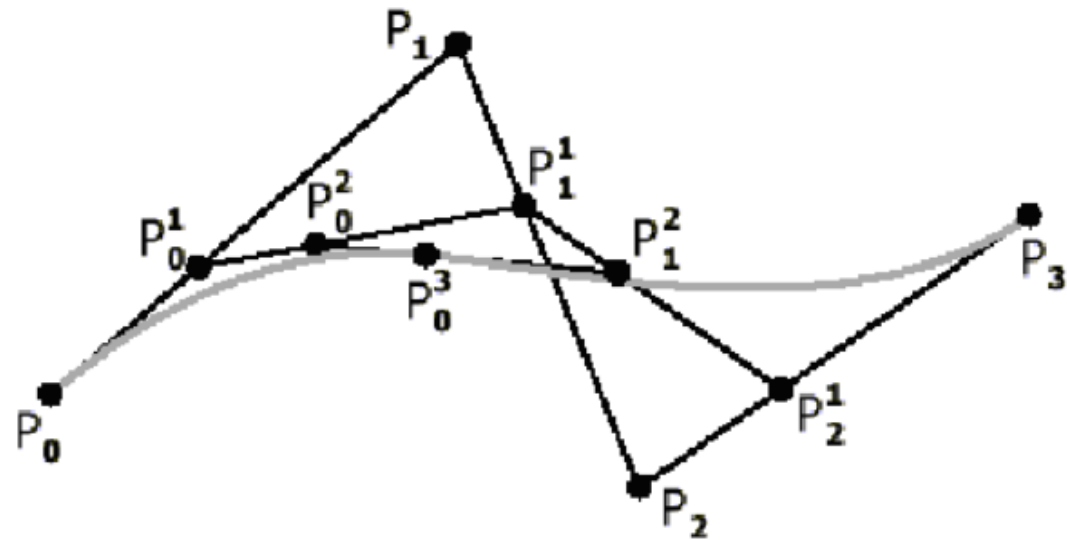
$$(1-t)^2 P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2 P_2$$

$$P_1^2 = (1-t)P_1^1 + tP_2^1 =$$

$$(1-t)^2 P_1 + 2t(1-t)P_2 + t^2 P_3$$

$$P_0^3 = (1-t)P_0^2 + tP_1^2 = (1-t)^2 P_1^2 + 2t(1-t)P_1^2 + t^2 P_1^2 =$$

$$(1-t)^3 P_0 + 3t(1-t)^2 P_1 + 3t^2(1-t)P_2 + t^3 P_3$$



(3D, с N + 1 опорной точкой)

$$P^n(t) = \sum_{i=0}^n P_i \cdot B_i^n(t) \quad C_i^n = \frac{n!}{i! \cdot (n-i)!}$$

$$B_i^n(t) = C_i^n \cdot t^i (1-t)^{n-i} = \frac{n!}{i! \cdot (n-i)!} \cdot t^i (1-t)^{n-i}$$

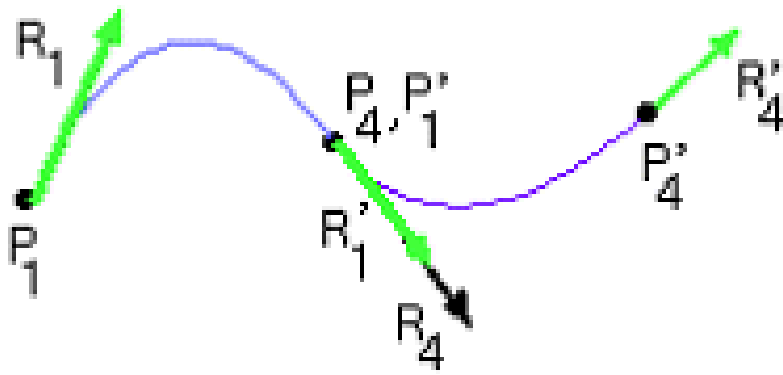
Некоторые свойства кривых Безье:

- инвариантность относительно аффинных преобразований;
- инвариантность относительно линейных замен параметризации;
- кривая Безье принадлежит выпуклой оболочке опорных точек (следует из геометрического способа построения) и ... деление единицы;
- кривая Безье проходит через первую и последнюю точки;
- симметричность: если рассматривать контрольные точки в противоположном порядке, то кривая не изменится;
- степень многочлена, представляющего кривую в аналитическом виде на 1 меньше числа опорных точек

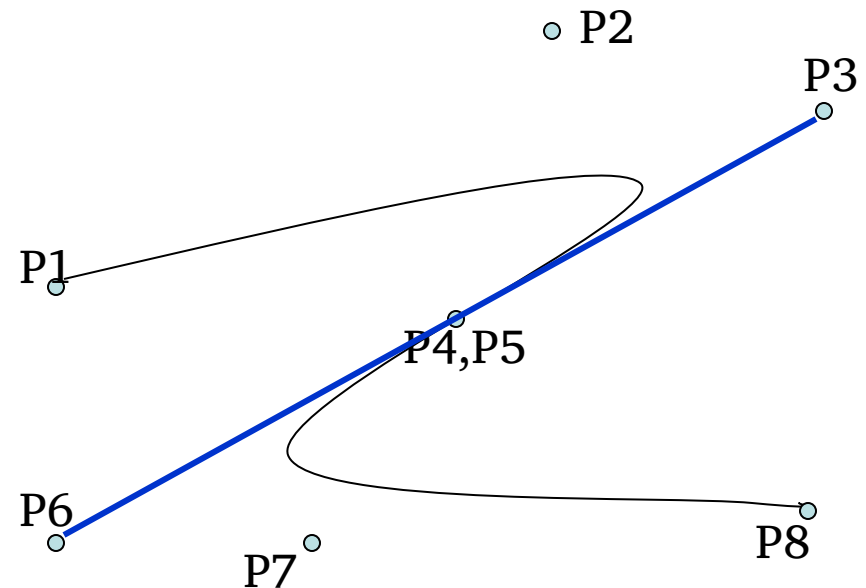
Сочленение кусков кривой

При обоих методах интерполяции нам необходимо строить целую кривую из небольших кусков. При интерактивной работе можно остановиться на форме кривой удовлетворяющей визуально. Правда, кривые конструируются и для дизайна, и для расчетов. Требуется удовлетворить некоторые условия сочленения, как правило, это требование непрерывности кривой и касательной

i -й участок – параметр t от $(i-1)$ до i



$$R_4 = k \cdot R'_1, k > 0$$



P3, P4(P5) и P6 на одной прямой

Геометрическая и параметрическая непрерывность

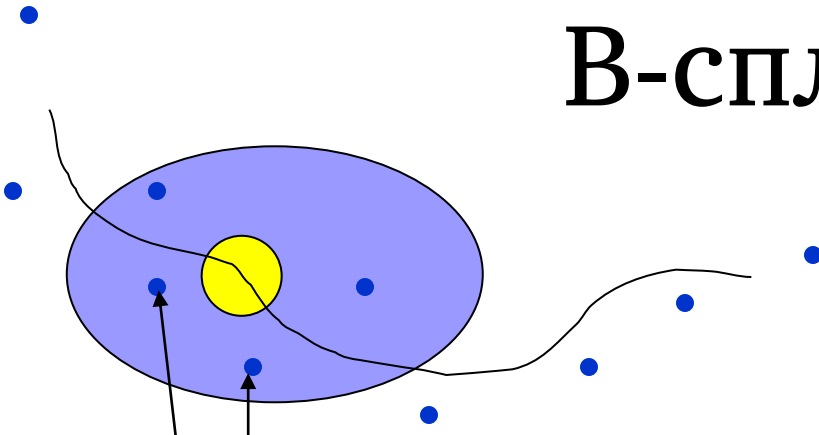
- G0: кривые непрерывные, т.е. куски стыкуются.
- G1: первые производные пропорциональны в точке стыковки кусков. Таким образом, касательные имеют одинаковое направление, но не величину, т.е. первые производные пропорциональны.
- G2: первые и вторые производные пропорциональны в точке стыка кусков.
- C0: кривые стыкуются.
- C1: первые производные равны.
- C2: первые и вторые производные равны в точке стыка кусков. Если t это время, то ускорение непрерывно, и... – кривизна.
- C n : n -ые производные равны.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} / \frac{dx}{dt}$$

В-сплайны

- В случае Эрмита мы обеспечивали прохождение кривой через обе заданные концевые точки.
- В случае Безье кривая проходит через концевые точки и не проходит через другие две точки, называемые управляющими.
- В-сплайн – это еще более трудно видимая зависимость от исходных точек, точнее, кривая не проходит через исходные точки, как правило, но они используются как управляющие для ее формы. Эта кривая строится на основе сразу N точек P_1, \dots, P_N

В-сплайны



участок $\{P_i, P_{i+1}\}$

$$i = 2, \dots, N - 2$$

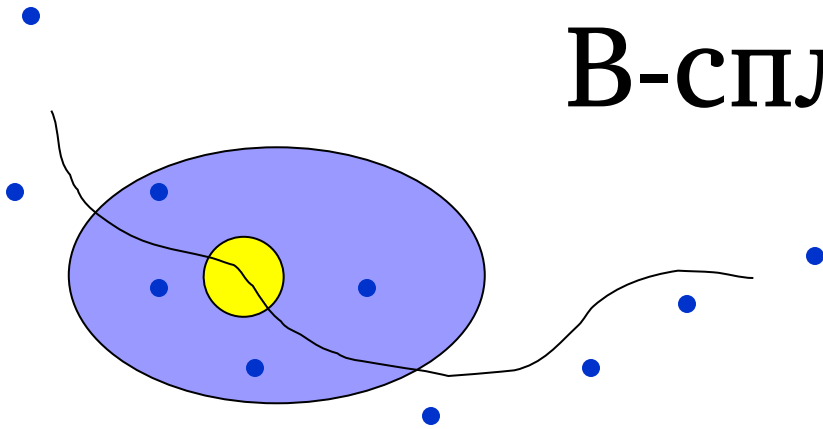
$$t \in [0, 1]$$

$$x_i(t) = T \cdot M_s \cdot G_{sx}^i$$

$$G_s^i = \begin{pmatrix} P_{i-1} \\ P_i \\ P_{i+1} \\ P_{i+2} \end{pmatrix}$$

$$M_s = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

В-сплайны



$$G_s^i = \begin{pmatrix} P_{i-1} \\ P_i \\ P_{i+1} \\ P_{i+2} \end{pmatrix}$$

$$M_s = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

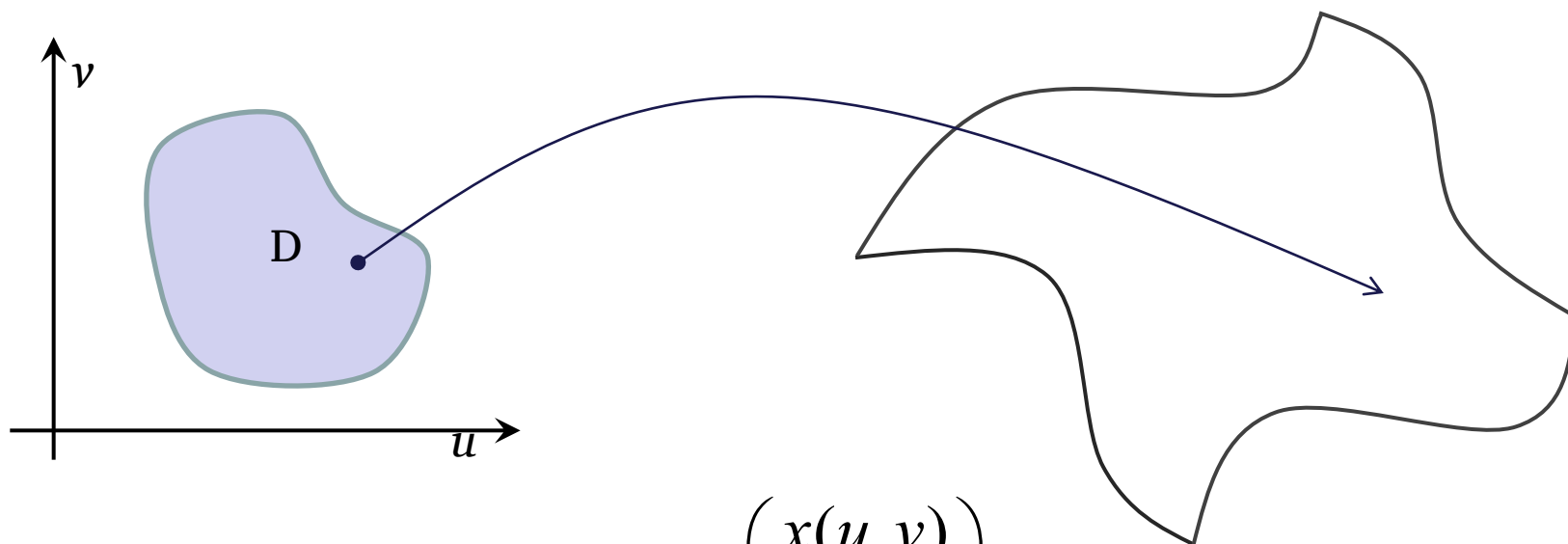
$$t \in [0,1]$$

$$x_i(t) = T \cdot M_s \cdot G_{sx}^i$$

Свойства В-сплайновой кривой

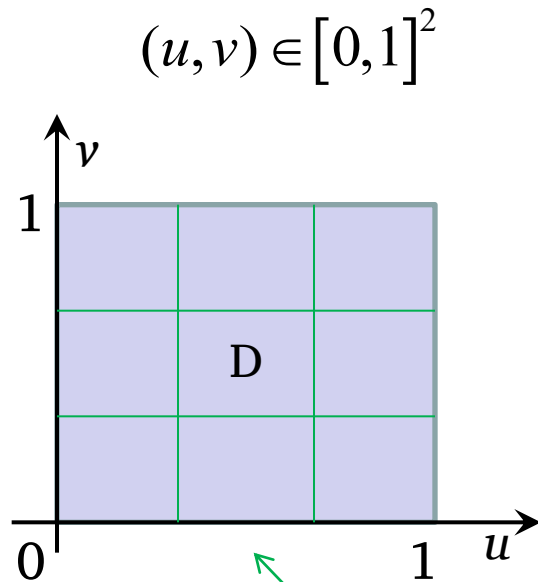
- Она непрерывна
- Непрерывна первая производная в точках стыковки участков, т.е. непрерывна касательная
- Непрерывна вторая производная в точках стыковки участков, т.е. непрерывна и кривизна
- i -ый участок кривой целиком лежит внутри выпуклой оболочки 4-х точек аналогично участку кривой Безье
- Парная точка уменьшает степень гладкости стыковки участков.

Параметрические поверхности



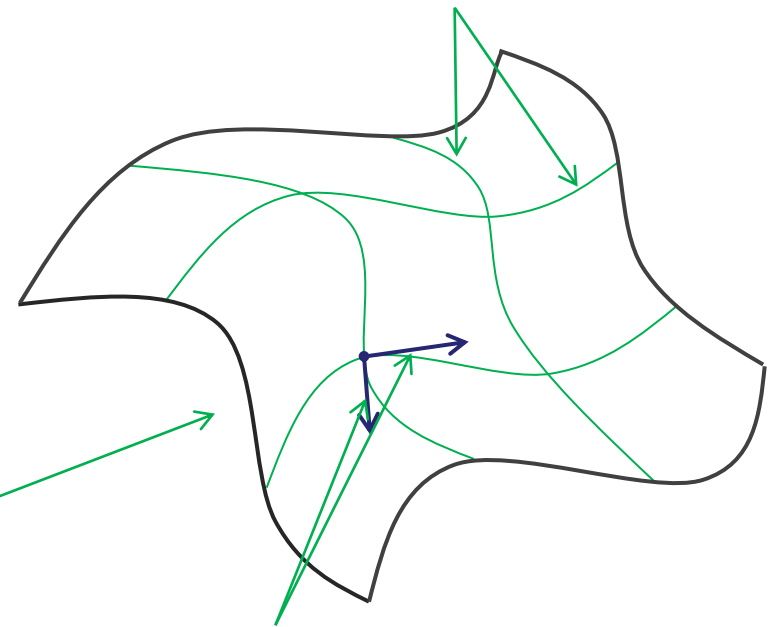
$$r(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}$$

Параметрические поверхности



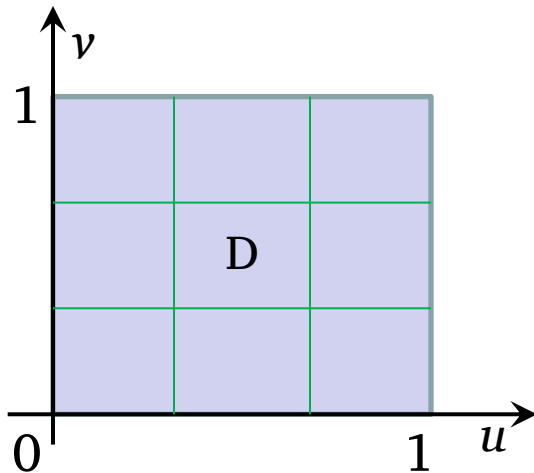
Кусок

Параметрические линии
на поверхности

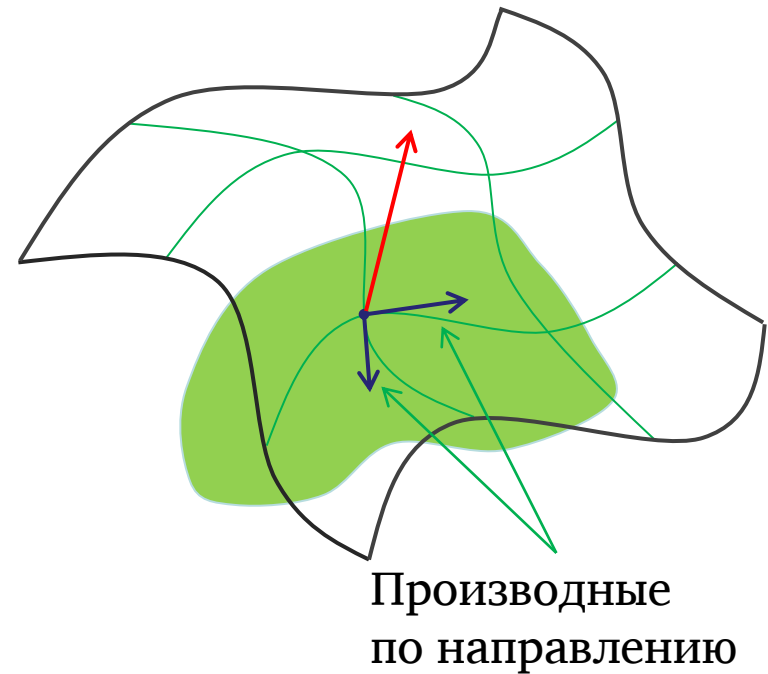


Производные
по направлению $r'_u(u, v)$
 $r'_v(u, v)$

Параметрические поверхности

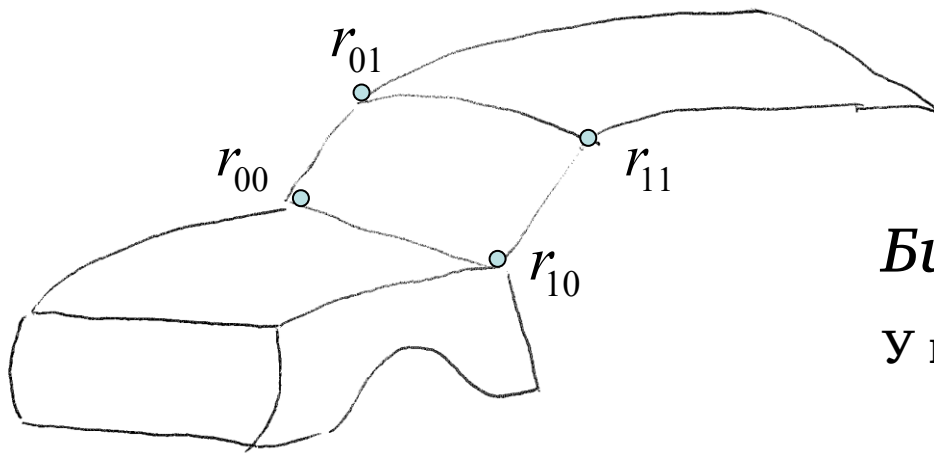


$$r(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}$$



$$\vec{n}(u, v) = r'_u(u, v) \times r'_v(u, v)$$

Конструирование поверхностей из кусков (patches)



Билинейная интерполяция

У куска 4 опорных точки

$$(u, v) \in [0, 1]^2$$

$$BL(u, v) = (1 - u)(1 - v)r_{00} + u(1 - v)r_{10} + (1 - u)vr_{01} + uv r_{11}$$

седло

Конструирование поверхностей из кусков (patches)

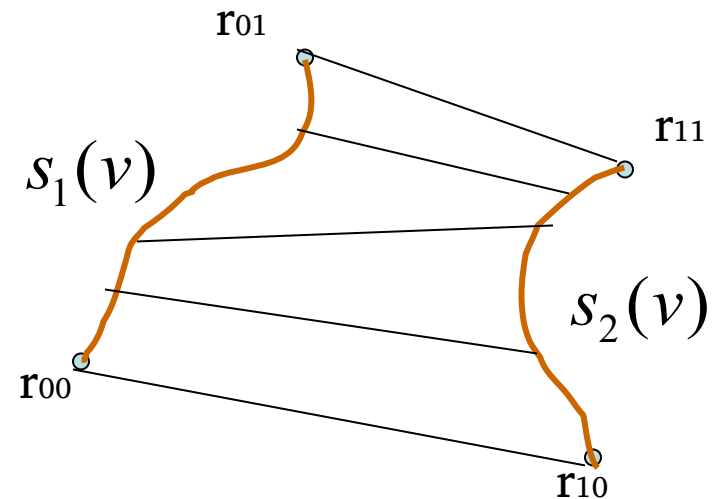
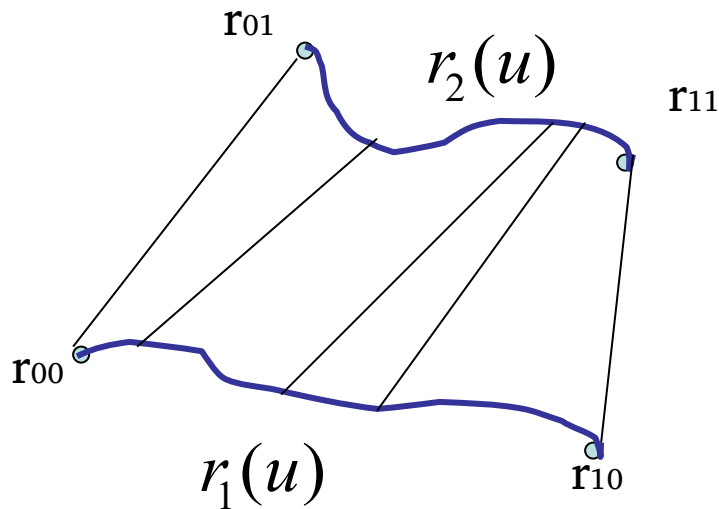
Линейчатые поверхности

$$r_1(u) = r(u, 0)$$

$$r_2(u) = r(u, 1)$$

$$s_1(v) = r(0, v)$$

$$s_2(v) = r(1, v)$$



$$r_1(u, v) = (1 - v)r(u, 0) + vr(u, 1)$$

$$r_2(u, v) = (1 - u)r(0, v) + ur(1, v)$$

Конструирование поверхностей из кусков (patches)

$$r_1(u, v) = (1 - v)r(u, 0) + vr(u, 1)$$

+

$$r_2(u, v) = (1 - u)r(0, v) + ur(1, v)$$

$$r(u, 0) \quad \Rightarrow \quad r(u, 0) + [(1 - u)r(0, 0) + ur(1, 0)] \quad ?$$

$$BL(u, v) = (1 - u)(1 - v)r_{00} + u(1 - v)r_{10} + (1 - u)vr_{01} + uvr_{11}$$

$$\Rightarrow \quad r(u, v) = r_1(u, v) + r_2(u, v) - BL(u, v)$$

Задача: приблизить сферу,
построенную на основе куба

Кусок в форме Эрмита

$$x(u, v) = \sum_{i,j=1}^4 a_{i,j} u^{4-i} v^{4-j}$$

$$r(u, v) \quad (u, v) \in [0, 1]^2$$

$$x(u, v) = U \cdot C_x \cdot V^T$$

$$y(u, v) = U \cdot C_y \cdot V^T$$

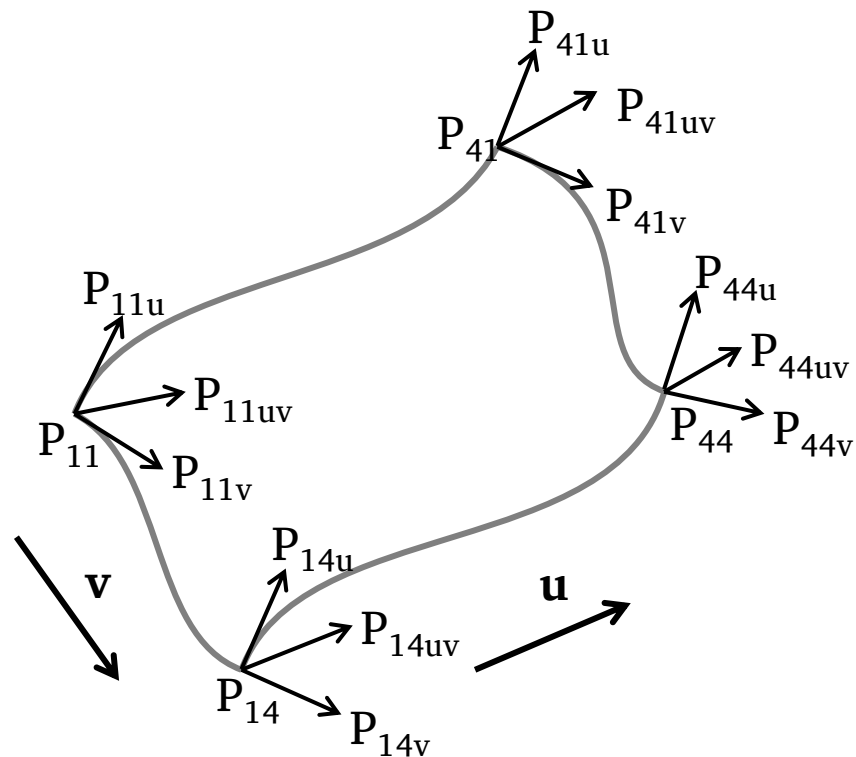
$$z(u, v) = U \cdot C_z \cdot V^T$$

$$U = \begin{bmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} v^3 & v^2 & v & 1 \end{bmatrix}$$

$$x(u) = U M_h G_{hx}$$

$$C_x = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_4 \\ R_1 \\ R_4 \end{pmatrix}_x = M_h G_{hx}$$



Кусок в форме Эрмита

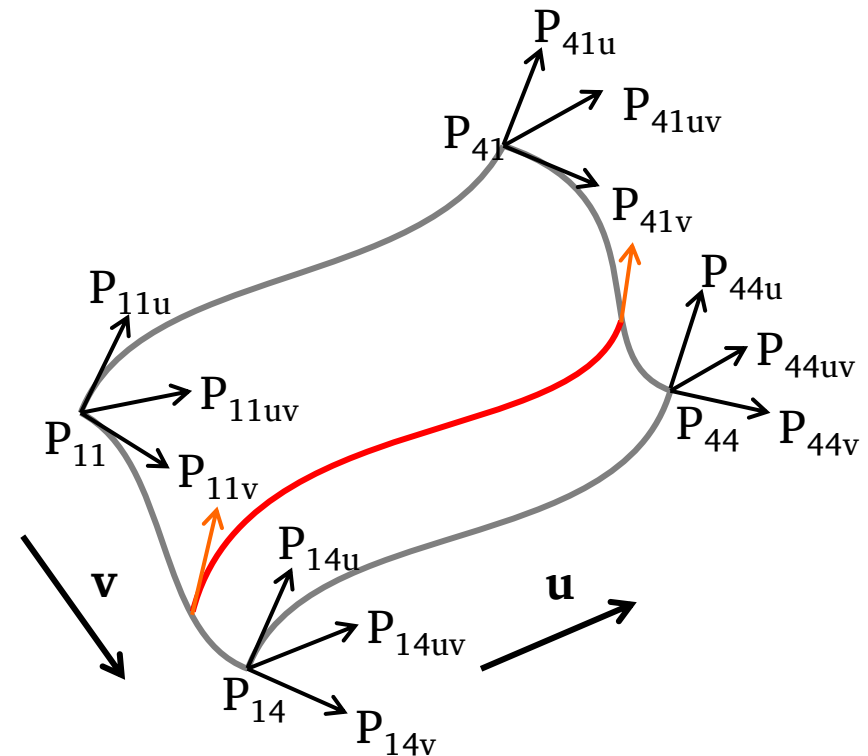
$$C_x = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_4 \\ R_1 \\ R_4 \end{pmatrix}_x = M_h G_{hx}$$

$$x(u) = UM_h G_{hx}$$

$$x(u, v) = UM_h G_{hx}(v) = UM_h \begin{pmatrix} P_1(v) \\ P_4(v) \\ R_1(v) \\ R_4(v) \end{pmatrix}_x$$

$$x(u, v) = U \cdot C_x \cdot V^T$$

$$x(u, v) = \sum_{i,j=1}^4 a_{i,j} u^{4-i} v^{4-j}$$



Кусок в форме Эрмита

$$x(u, v) = UM_h G_{hx}(v) = UM_h \begin{pmatrix} P_1(v) \\ P_4(v) \\ R_1(v) \\ R_4(v) \end{pmatrix}_x$$

$$x(u, v) = U \cdot C_x \cdot V^T$$

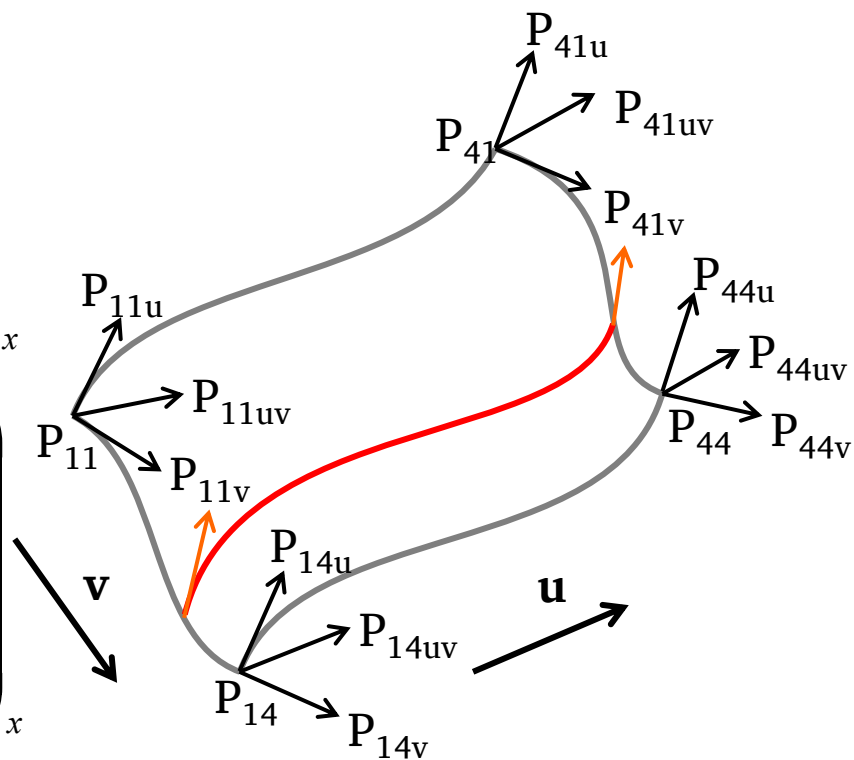
$$x(u, v) = \sum_{i,j=1}^4 a_{i,j} u^{4-i} v^{4-j}$$

$$P_{1x}(v) = V \cdot M_h \cdot \begin{pmatrix} q_{11} \\ q_{12} \\ q_{13} \\ q_{14} \end{pmatrix}_x$$

$$P_{4x}(v) = V \cdot M_h \cdot \begin{pmatrix} q_{21} \\ q_{22} \\ q_{23} \\ q_{24} \end{pmatrix}_x$$

$$R_{1x}(v) = V \cdot M_h \cdot \begin{pmatrix} q_{31} \\ q_{32} \\ q_{33} \\ q_{34} \end{pmatrix}_x$$

$$R_{4x}(v) = V \cdot M_h \cdot \begin{pmatrix} q_{41} \\ q_{42} \\ q_{43} \\ q_{44} \end{pmatrix}_x$$



Кусок в форме Эрмита

$$x(u, v) = UM_h G_{hx}(v) = UM_h \begin{pmatrix} P_1(v) \\ P_4(v) \\ R_1(v) \\ R_4(v) \end{pmatrix}_x$$

$$x(u, v) = U \cdot C_x \cdot V^T$$

$$x(u, v) = \sum_{i,j=1}^4 a_{i,j} u^{4-i} v^{4-j}$$

$$P_{1x}(v) = V \cdot M_h \cdot \begin{pmatrix} q_{11} \\ q_{12} \\ q_{13} \\ q_{14} \end{pmatrix}_x$$

$$P_{4x}(v) = V \cdot M_h \cdot \begin{pmatrix} q_{21} \\ q_{22} \\ q_{23} \\ q_{24} \end{pmatrix}_x$$

$$\begin{bmatrix} P_1(v) & P_4(v) & R_1(v) & R_4(v) \end{bmatrix}_x = VM_h \begin{pmatrix} q_{11} & q_{21} & q_{31} & q_{41} \\ q_{12} & q_{22} & q_{32} & q_{42} \\ q_{13} & q_{23} & q_{33} & q_{43} \\ q_{14} & q_{24} & q_{34} & q_{44} \end{pmatrix}_x$$

$$R_{1x}(v) = V \cdot M_h \cdot \begin{pmatrix} q_{31} \\ q_{32} \\ q_{33} \\ q_{34} \end{pmatrix}_x$$

$$R_{4x}(v) = V \cdot M_h \cdot \begin{pmatrix} q_{41} \\ q_{42} \\ q_{43} \\ q_{44} \end{pmatrix}_x$$

Кусок в форме Эрмита

$$\begin{bmatrix} P_1(v) & P_4(v) & R_1(v) & R_4(v) \end{bmatrix}_x = VM_h \begin{pmatrix} q_{11} & q_{21} & q_{31} & q_{41} \\ q_{12} & q_{22} & q_{32} & q_{42} \\ q_{13} & q_{23} & q_{33} & q_{43} \\ q_{14} & q_{24} & q_{34} & q_{44} \end{pmatrix}_x$$

$$\begin{bmatrix} P_1(v) \\ P_4(v) \\ R_1(v) \\ R_4(v) \end{bmatrix}_x = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & q_{14} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & q_{24} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} & q_{34} \\ q_{41} & q_{42} & q_{43} & q_{44} \end{pmatrix}_x M_h^T V^T = Q_x M_h^T V^T$$

$$x(u, v) = U \cdot M_h \cdot Q_x \cdot M_h^T \cdot V^T,$$

$$y(u, v) = U \cdot M_h \cdot Q_y \cdot M_h^T \cdot V^T,$$

$$z(u, v) = U \cdot M_h \cdot Q_z \cdot M_h^T \cdot V^T.$$

Кусок в форме Эрмита

$$x(u, v) = U \cdot M_h \cdot Q_x \cdot M_h^T \cdot V^T,$$

$$y(u, v) = U \cdot M_h \cdot Q_y \cdot M_h^T \cdot V^T,$$

$$z(u, v) = U \cdot M_h \cdot Q_z \cdot M_h^T \cdot V^T.$$

$$x(u, v) = U \cdot C_x \cdot V^T$$

$$x(u, v) = \sum_{i,j=1}^4 a_{i,j} u^{4-i} v^{4-j}$$

Как определить элементы матриц Q_x , Q_y , Q_z , с помощью точек и

векторов касательных? Достаточно формально:

- $q_{11} = x(0, 0) = x_{00}$, т.к. это начало $P_{1x}(v) = r(0, v)$.
- $q_{12} = x(0, 1) = x_{01}$, т.к. это конец $P_{1x}(v) = r(1, v)$.
- $q_{13} = \frac{\partial x}{\partial v}(0, 0) = x_{v,00}$, т.е. наклон в начале для кривой $P_{1x}(v) = r(0, v)$.
- $q_{14} = \frac{\partial x}{\partial v}(0, 1) = x_{v,01}$, т.е. наклон в конце для кривой $P_{1x}(v) = r(0, v)$.

Для граничной кривой

$$P_{1x}(v) = r(0, v)$$

$$q_{11} = x(0, 0) = x_{00},$$

т.к. это начало $P_{1x}(v) = r(0, v)$.

$$q_{12} = x(0, 1) = x_{01},$$

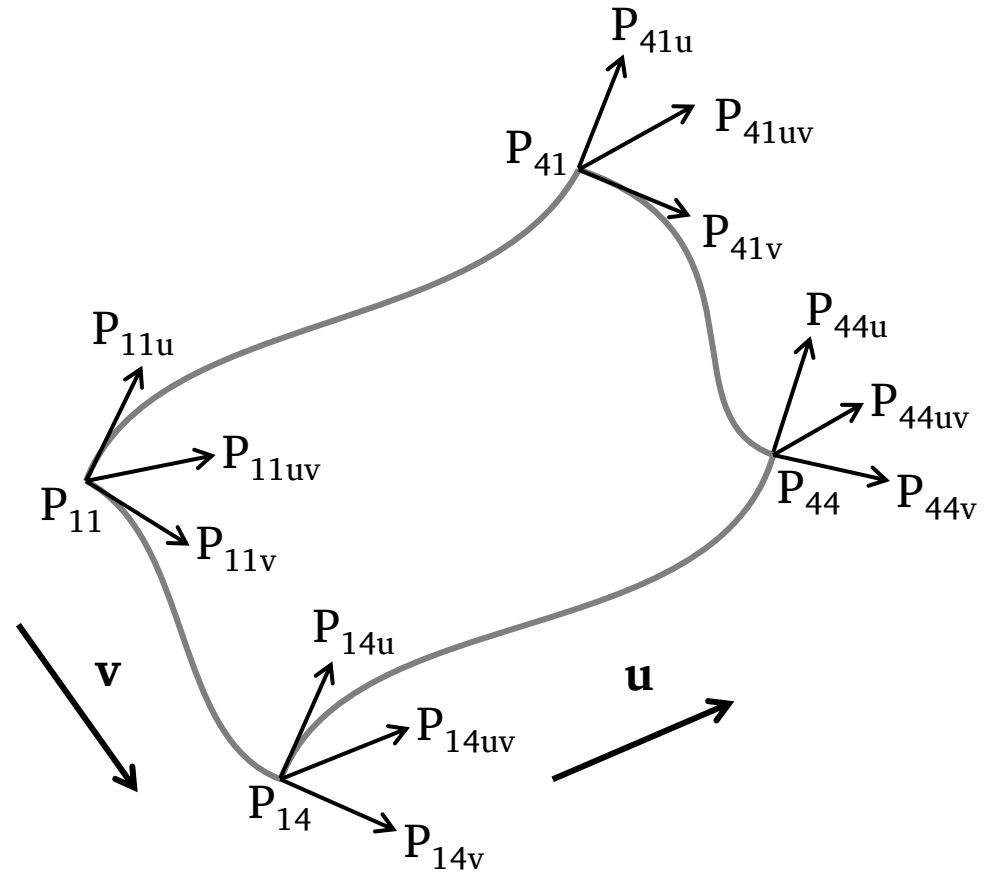
т.к. это конец $P_{1x}(v) = r(1, v)$.

$$q_{13} = \frac{\partial x}{\partial v}(0, 0) = x_{v,00},$$

т.е. наклон в начале для кривой $P_{1x}(v) = r(0, v)$.

$$q_{14} = \frac{\partial x}{\partial v}(0, 1) = x_{v,01},$$

т.е. наклон в конце для кривой $P_{1x}(v) = r(0, v)$.



Этого вполне достаточно для определения граничной кривой $P_{1x}(v) = r(0, v)$. Понадобятся и вторые

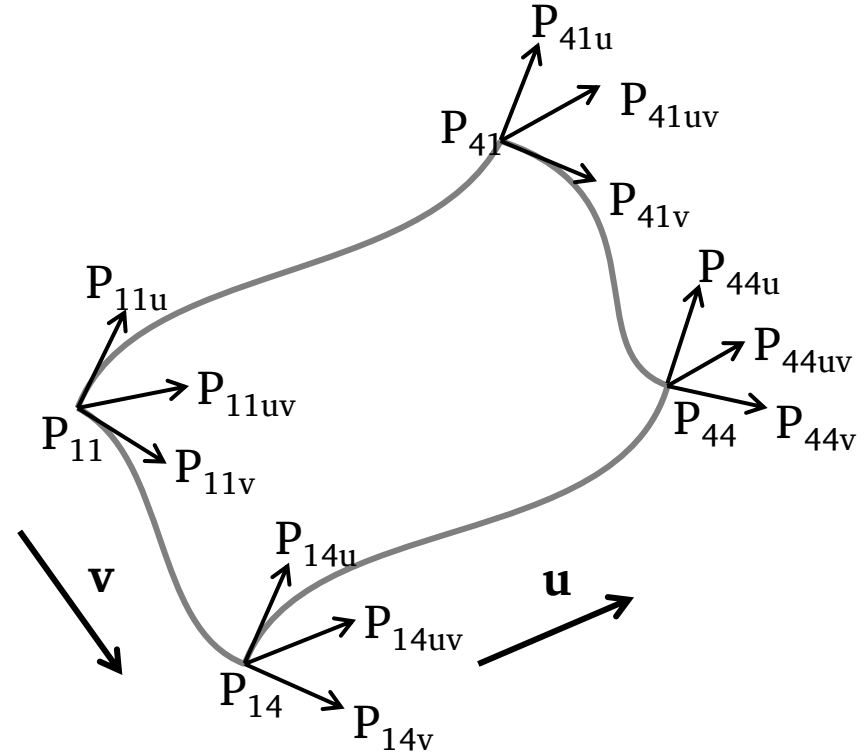
производные типа: $q_{33} = \frac{\partial^2 x}{\partial u \cdot \partial v}(0, 0) = x_{uv,00}$; которая

задает начальный наклон для графика производной – касательной $R_{1x}(v)$. Используя введенные

мнемонические обозначения запишем всю матрицу:

$$Q_x = \begin{pmatrix} x_{00} & x_{01} & x_{v,00} & x_{v,01} \\ x_{10} & x_{11} & x_{v,10} & x_{v,11} \\ x_{u,00} & x_{u,01} & x_{uv,00} & x_{uv,01} \\ x_{u,10} & x_{u,11} & x_{uv,10} & x_{uv,11} \end{pmatrix}$$

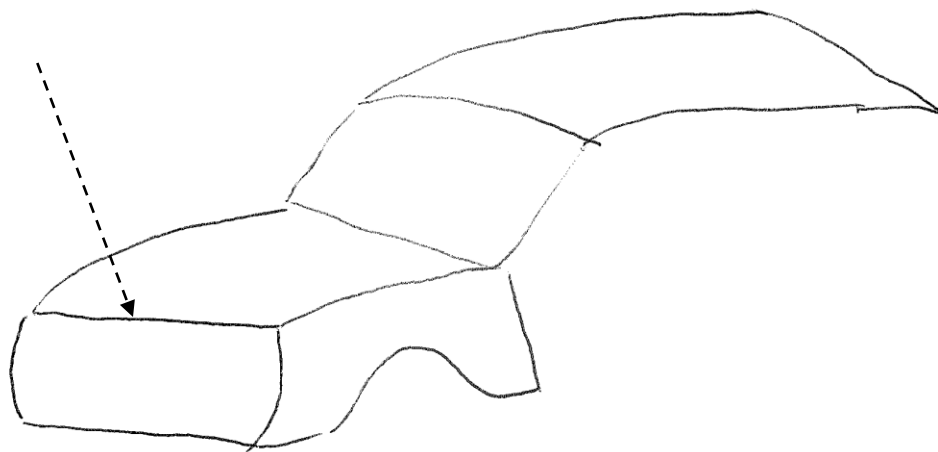
С этой формой связаны также имена Кунса и Фергюссона



Сшивка 2-х кусков

Просто непрерывность

$$Q_x^1 = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & q_{24} \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix}_x \Leftrightarrow \begin{pmatrix} q_{21} & q_{21} & q_{21} & q_{21} \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix}_x = Q_x^2$$



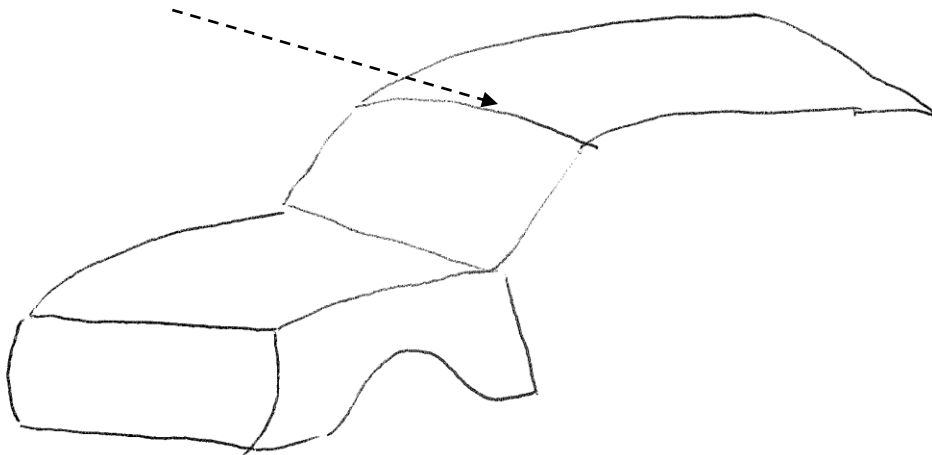
$$Q_x = \begin{pmatrix} x_{00} & x_{01} & x_{v,00} & x_{v,01} \\ x_{10} & x_{11} & x_{v,10} & x_{v,11} \\ x_{u,00} & x_{u,01} & x_{uv,00} & x_{uv,01} \\ x_{u,10} & x_{u,11} & x_{uv,10} & x_{uv,11} \end{pmatrix}$$

СШИВКА 2-х КУСКОВ

Непрерывность производных (гладкая сшивка)

$$Q_x^1 = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & q_{24} \\ * & * & * & * \\ q_{41} & q_{42} & q_{43} & q_{44} \end{pmatrix}_x \Leftrightarrow \begin{pmatrix} q_{21} & q_{21} & q_{21} & q_{21} \\ * & * & * & * \\ k \cdot q_{41} & k \cdot q_{42} & k \cdot q_{43} & k \cdot q_{44} \\ * & * & * & * \end{pmatrix}_x = Q_x^2$$

$$k > 0$$



$$Q_x = \begin{pmatrix} x_{00} & x_{01} & x_{v,00} & x_{v,01} \\ x_{10} & x_{11} & x_{v,10} & x_{v,11} \\ x_{u,00} & x_{u,01} & x_{uv,00} & x_{uv,01} \\ x_{u,10} & x_{u,11} & x_{uv,10} & x_{uv,11} \end{pmatrix}$$

Кусок в форме Эрмита

Чем хорош данный способ задания кусков поверхности? Тем, что в качестве исходных форм кусков можно взять какую-либо поверхность с известным аналитическим заданием. Затем меняя параметры матриц подгонять куски к требуемому виду.

Чем он плох? Трудно мыслить в касательных и особенно – в смешанных производных. Поэтому, как и в случае кривых, обратимся к форме Безье.

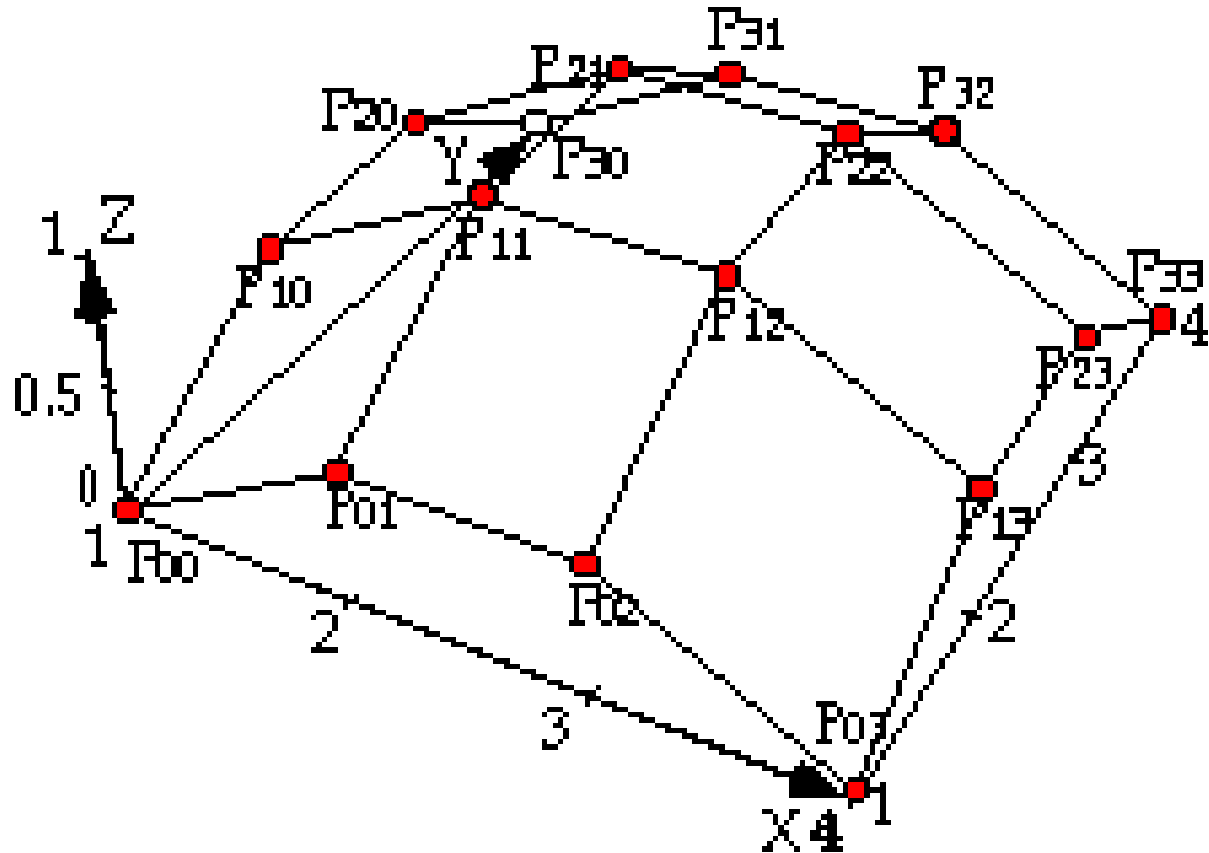
Кусок в форме Безье

$$x(u, v) = U \cdot M_b \cdot P_x \cdot M_b^T \cdot V^T$$

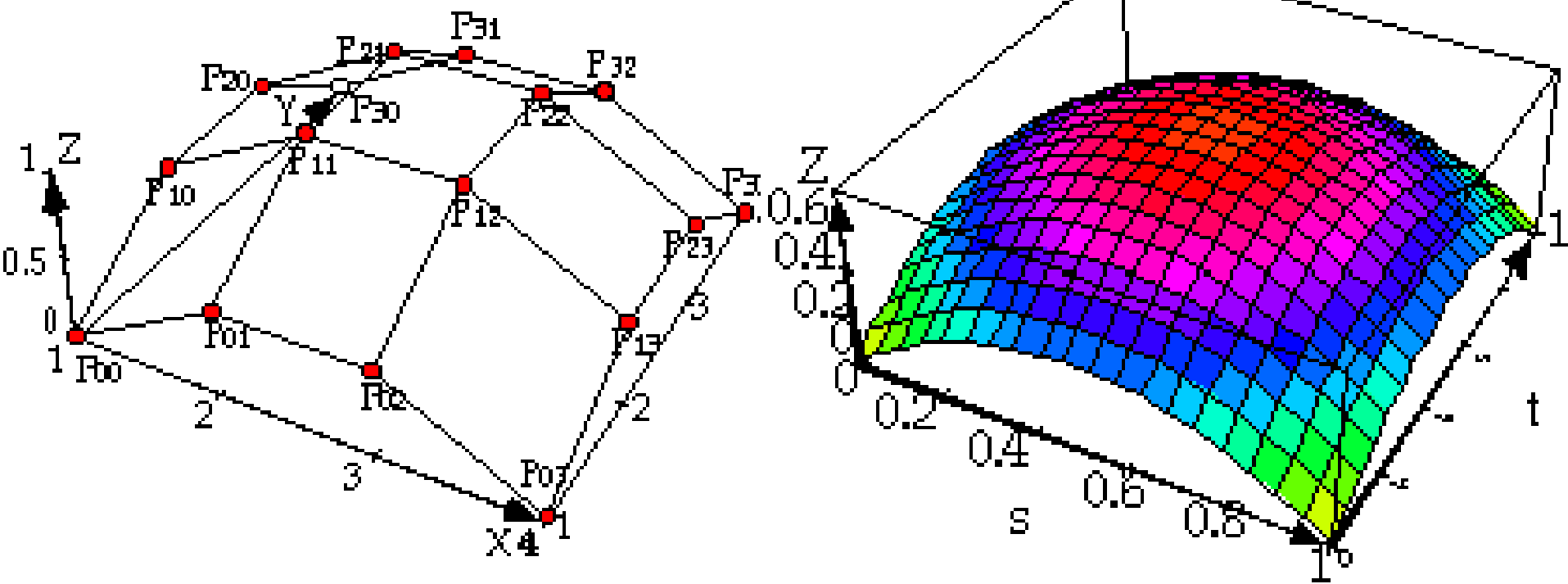
$$U = [u^3 \ u^2 \ u \ 1] \quad V = [v^3 \ v^2 \ v \ 1]$$

$$M_b = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

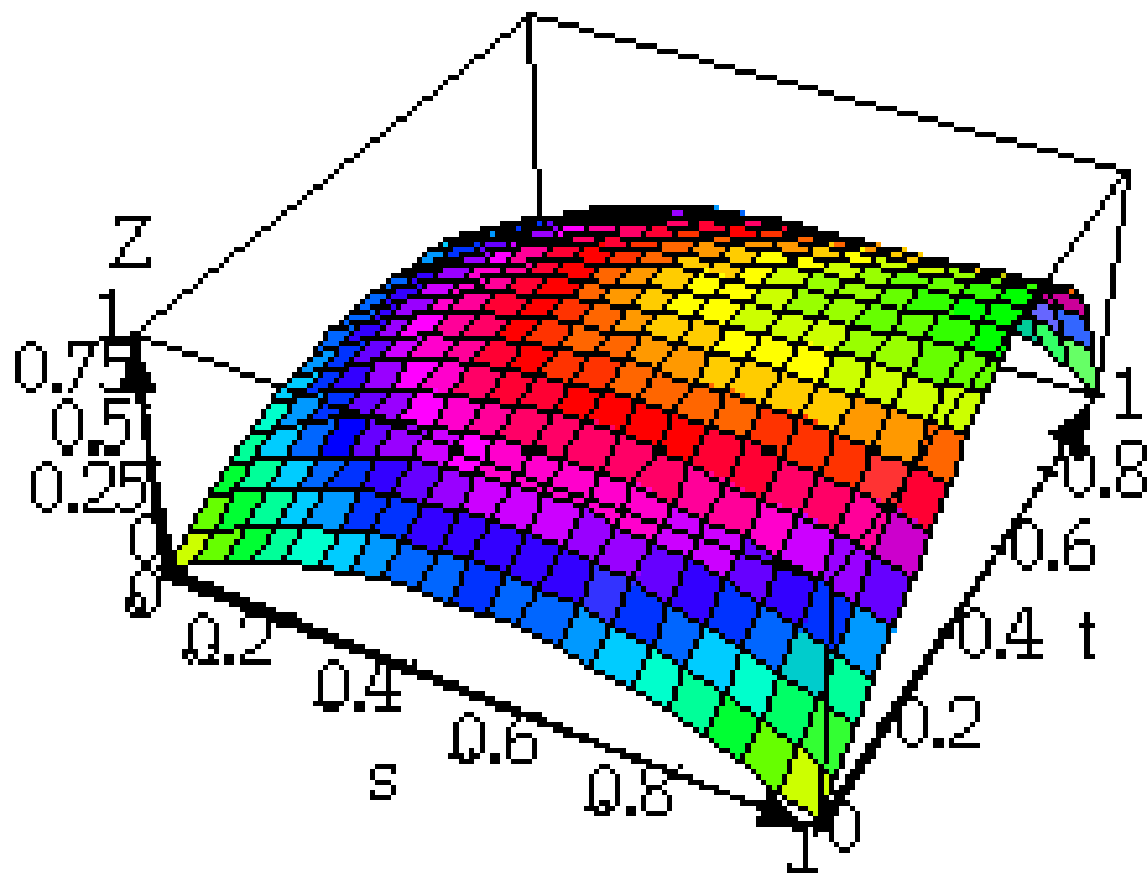
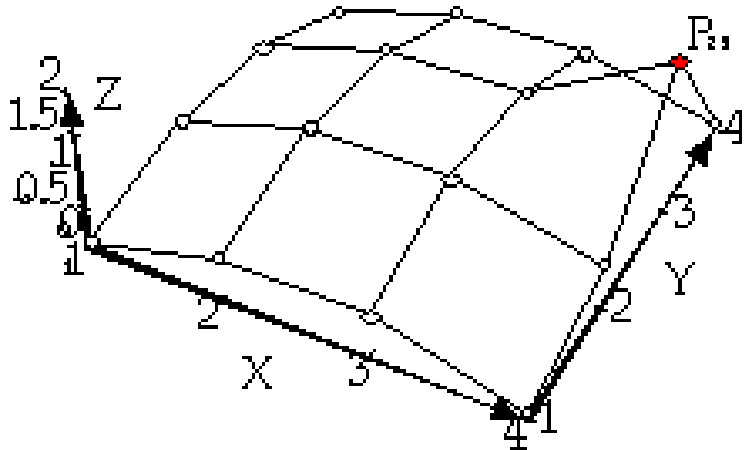
$$P_x = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{14} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & P_{24} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} & P_{34} \\ P_{41} & P_{42} & P_{43} & P_{44} \end{pmatrix}_x$$



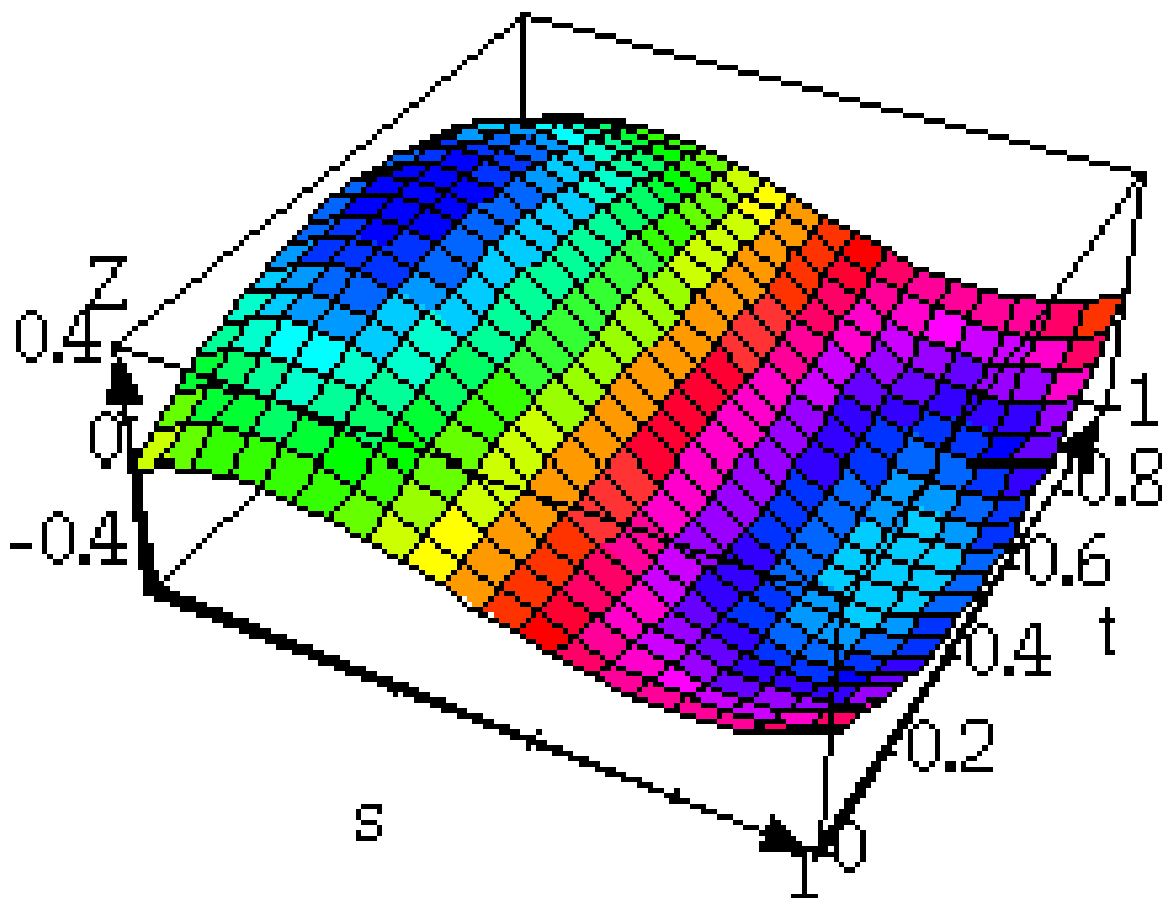
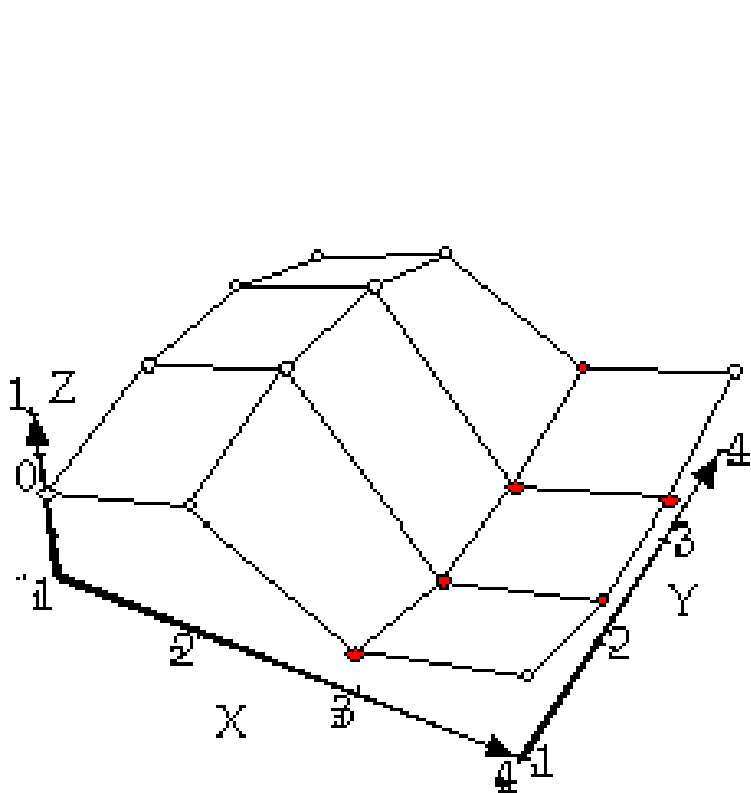
Кусок поверхности в форме Безье



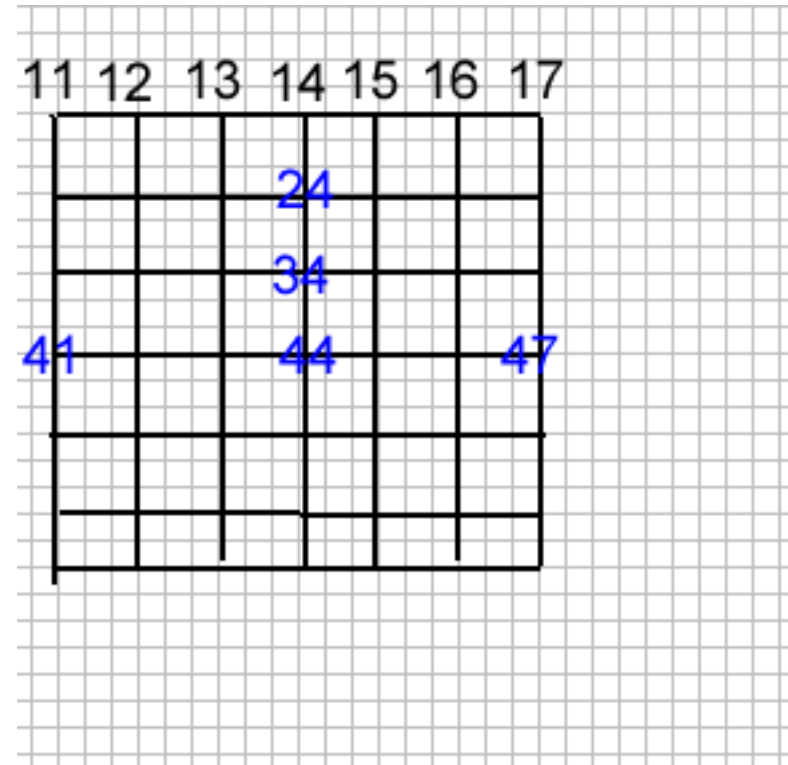
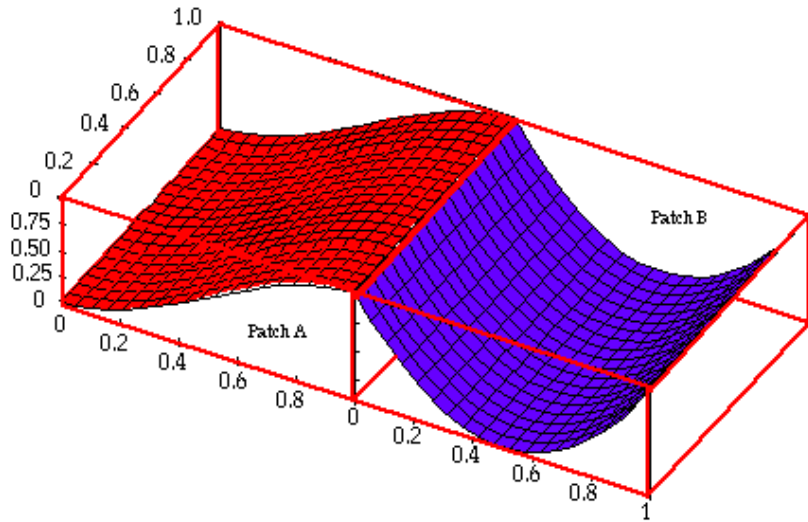
Кусок поверхности в форме Безье



Кусок поверхности в форме Безье



Сшивка кусков Безье



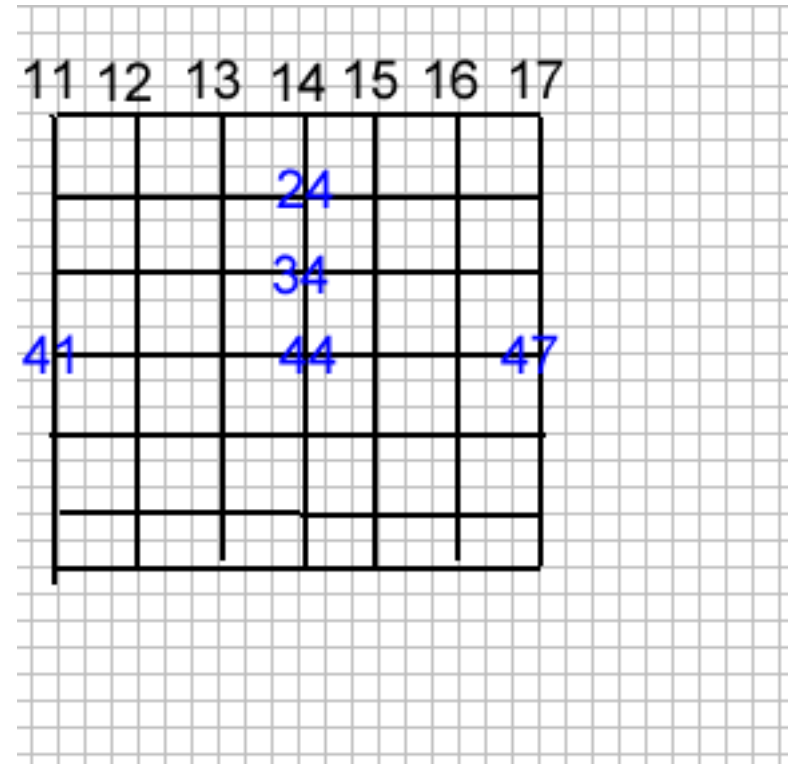
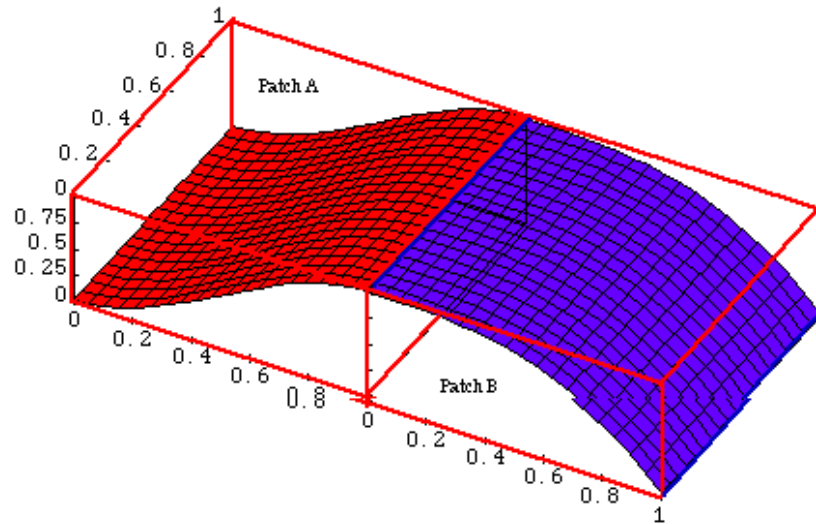
$$- P_{14} - P_{13} = k(P_{15} - P_{14}),$$

$$- P_{24} - P_{23} = k(P_{25} - P_{24}),$$

$$- P_{34} - P_{33} = k(P_{35} - P_{34}),$$

$$- P_{44} - P_{43} = k(P_{45} - P_{44}).$$

Сшивка кусков Безье



$$- P_{14} - P_{13} = k(P_{15} - P_{14}),$$

$$- P_{24} - P_{23} = k(P_{25} - P_{24}),$$

$$- P_{34} - P_{33} = k(P_{35} - P_{34}),$$

$$- P_{44} - P_{43} = k(P_{45} - P_{44}).$$

Поверхности вращения

Сфера

$$r(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} a \sin \theta \cos \varphi \\ a \sin \theta \sin \varphi \\ a \cos \theta \end{pmatrix}$$

Конус

$$r(z, \varphi) = \begin{pmatrix} az \cos \varphi \\ az \sin \varphi \\ bz \end{pmatrix}$$

Цилиндр

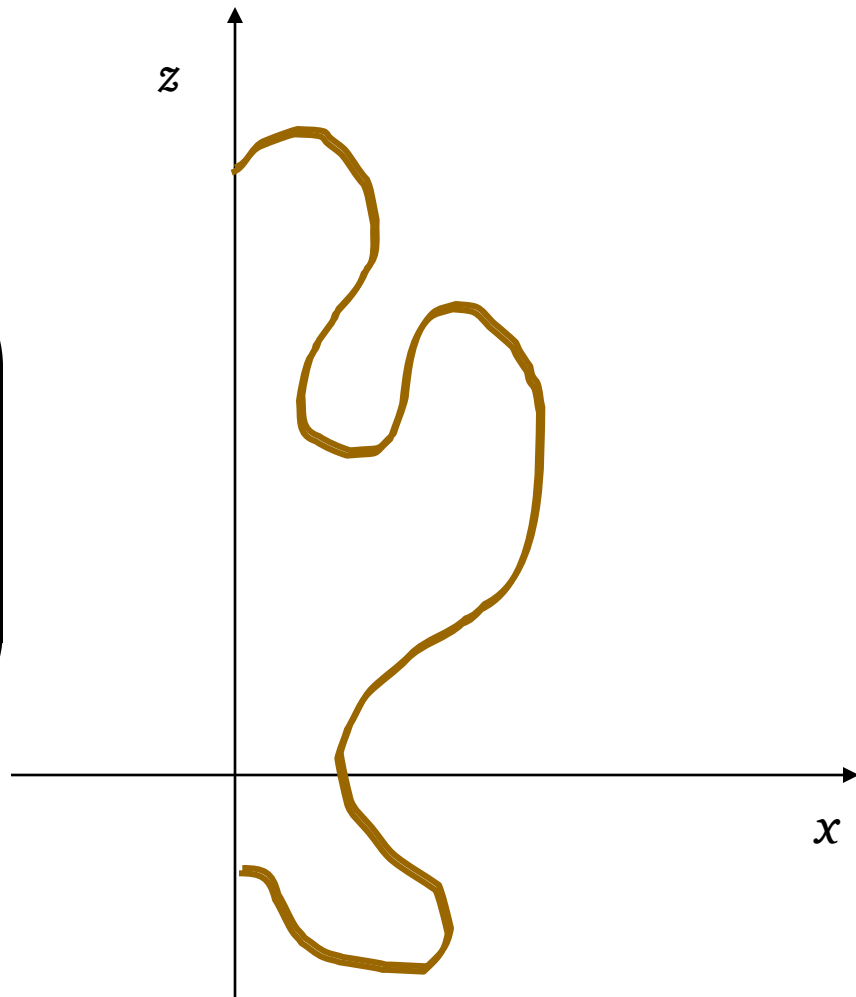
$$r(z, \varphi) = \begin{pmatrix} a \cos \varphi \\ a \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}$$

Поверхности вращения

$$r_c(t) = p(t)\bar{i} + z(t)\bar{k}$$

$$r(t, \varphi) = \begin{pmatrix} p(t) \cos(\varphi) \\ p(t) \sin(\varphi) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

$$0 \leq \varphi \leq \alpha$$



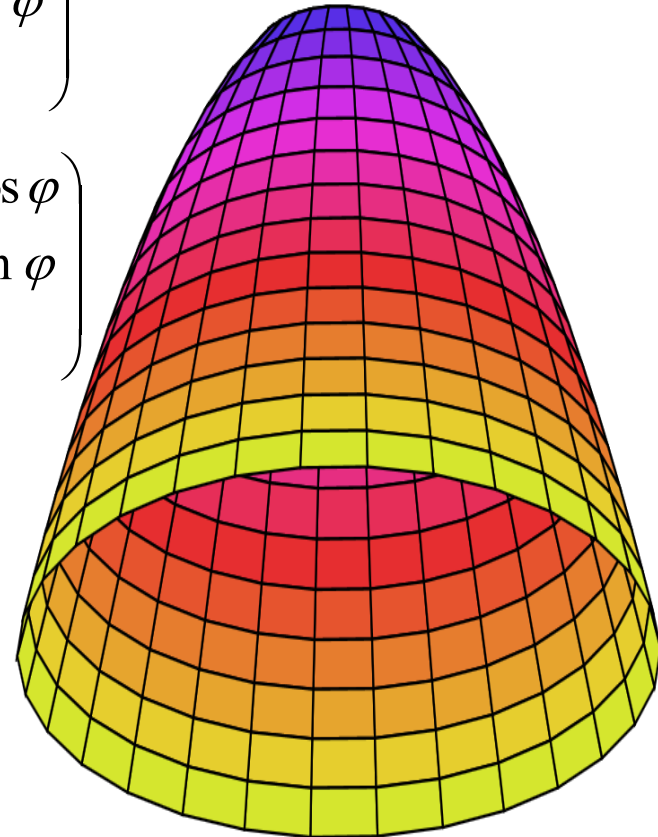
Пример: параболоид вращения

$$r(t, \varphi) = \begin{pmatrix} 2at \cos \varphi \\ 2at \sin \varphi \\ at^2 \end{pmatrix} \quad \frac{\partial r}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -2at \sin \varphi \\ 2at \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \frac{\partial r}{\partial t} = \begin{pmatrix} 2a \cos \varphi \\ 2a \sin \varphi \\ 2at \end{pmatrix}$$

$$\bar{p} = \frac{\partial r}{\partial t} \times \frac{\partial r}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ 2a \cos \varphi & 2a \sin \varphi & 2at \\ -2at \sin \varphi & 2at \cos \varphi & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4a^2 t^2 \cos \varphi \\ -4a^2 t^2 \sin \varphi \\ 4a^2 t \end{pmatrix}$$

$$|\bar{p}|^2 = 16a^4 t^4 + 16a^4 t^2 = 16a^4 t^2 (1 + t^2)$$

$$\bar{n} = \frac{\bar{p}}{|\bar{p}|} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \begin{pmatrix} -t \cos \varphi \\ -t \sin \varphi \\ 1 \end{pmatrix}$$



Суперквадрики

Сверхэллипсы (Фланаган, 1867)

$$\frac{x^n}{a^n} + \frac{y^n}{b^n} = 1$$

При больших n форма кривой приближается к прямоугольнику с гладкими углами

Суперквадрики

$$p(s,t) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix} + R \cdot \begin{pmatrix} \sin \pi s \cdot \cos 2\pi t \\ \sin \pi s \cdot \sin 2\pi t \\ \cos \pi s \end{pmatrix} \quad 0 \leq s, t \leq 1$$

Сфера, параметризованная на 0-1

Суперквадрики

$$p(s, t) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix} + R \cdot \begin{pmatrix} \sin \pi s \cdot \cos 2\pi t \\ \sin \pi s \cdot \sin 2\pi t \\ \cos \pi s \end{pmatrix} \quad 0 \leq s, t \leq 1$$

два экспоненциальных параметра формы
 e_1 и e_2

$C_t = \cos t$ - "широта".

$S_s = \sin s$ - "долгота".

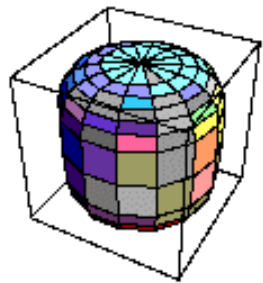
$$-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$0 \leq s \leq \pi.$$

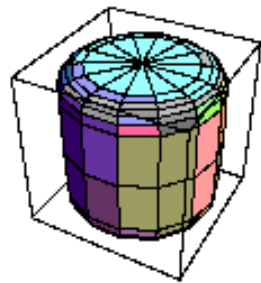
$$p(s, t) = \begin{pmatrix} x(s, t) \\ y(s, t) \\ z(s, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_t^{e_1} \cdot C_s^{e_2} \\ C_t^{e_1} \cdot S_s^{e_2} \\ S_t^{e_1} \end{pmatrix}$$

$$(\cos t)^e \longrightarrow (|\cos t|)^e \cdot \text{sign}(\cos t)$$

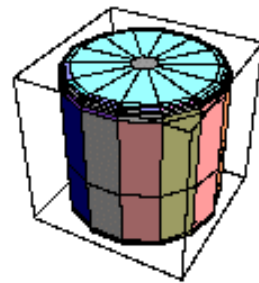
$$[e_1, e_2] \leq 1$$



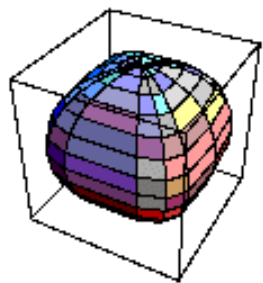
[.5,1]



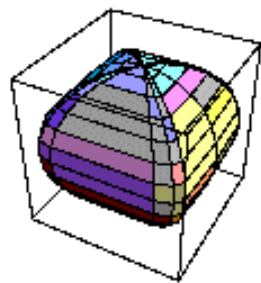
[.25,1]



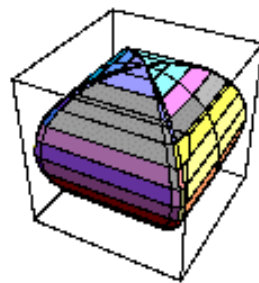
[.1,1]



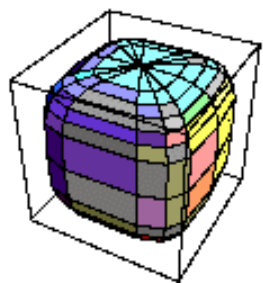
[1,.5]



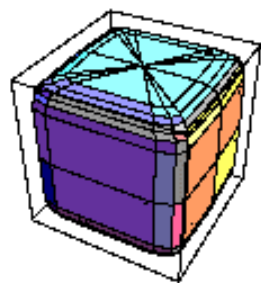
[1,.25]



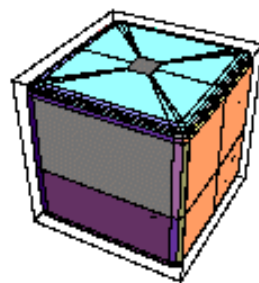
[1,.1]



[.5,.5]

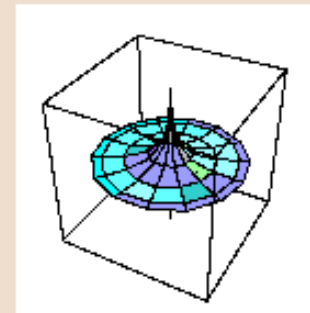
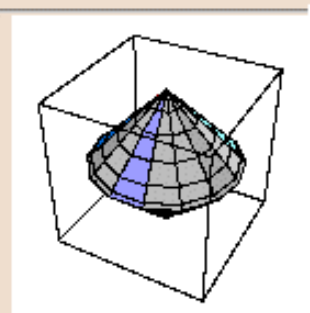
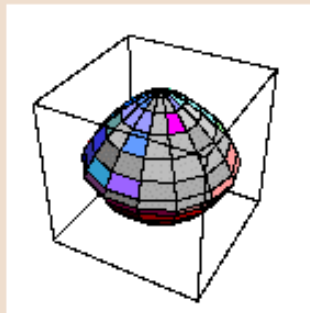


[.25,.25]



[.1,.1]

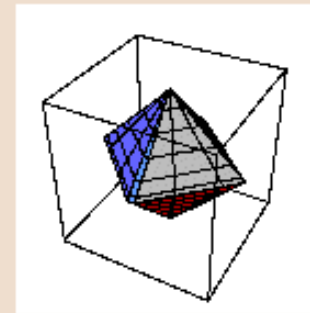
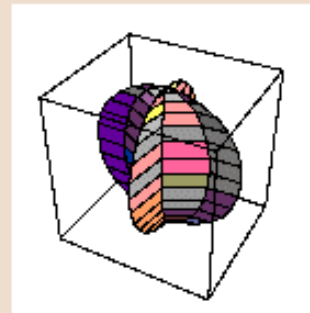
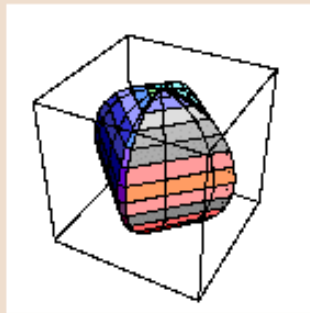
$[e_1, e_2] > 1.$



$[1.5, 1]$

$[2, 1]$

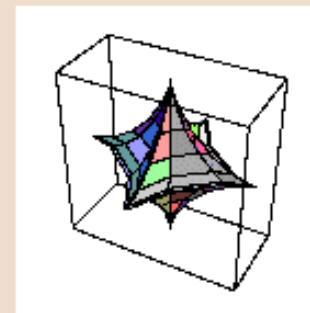
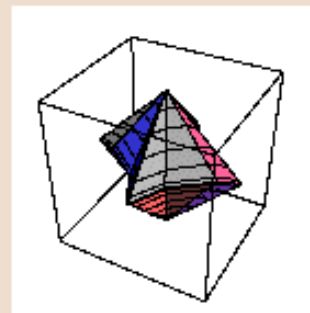
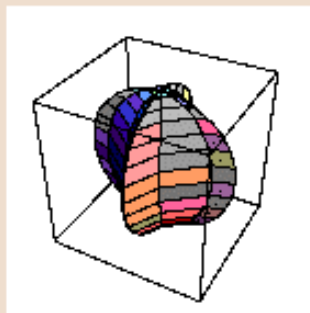
$[5, 1]$



$[1, 2]$

$[1, 5]$

$[2, 2]$



$[1, 3]$

$[2, 3]$

$[3, 3]$

Суперквадрики

$$p(s, t) = \begin{pmatrix} x(s, t) \\ y(s, t) \\ z(s, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \cdot C_t^{e_1} \cdot C_s^{e_2} \\ a_y \cdot C_t^{e_1} \cdot S_s^{e_2} \\ a_z \cdot S_t^{e_1} \end{pmatrix}$$

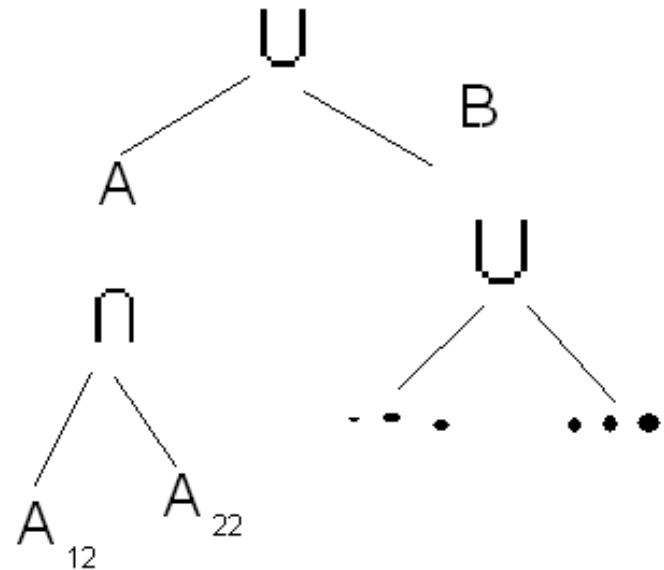
Независимые масштабные множители по осям

$$N(s, t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_x} C_t^{2-e_1} \cdot C_s^{2-e_2} \\ \frac{1}{a_y} C_t^{2-e_1} \cdot S_s^{2-e_2} \\ \frac{1}{a_z} S_t^{2-e_1} \end{pmatrix}$$

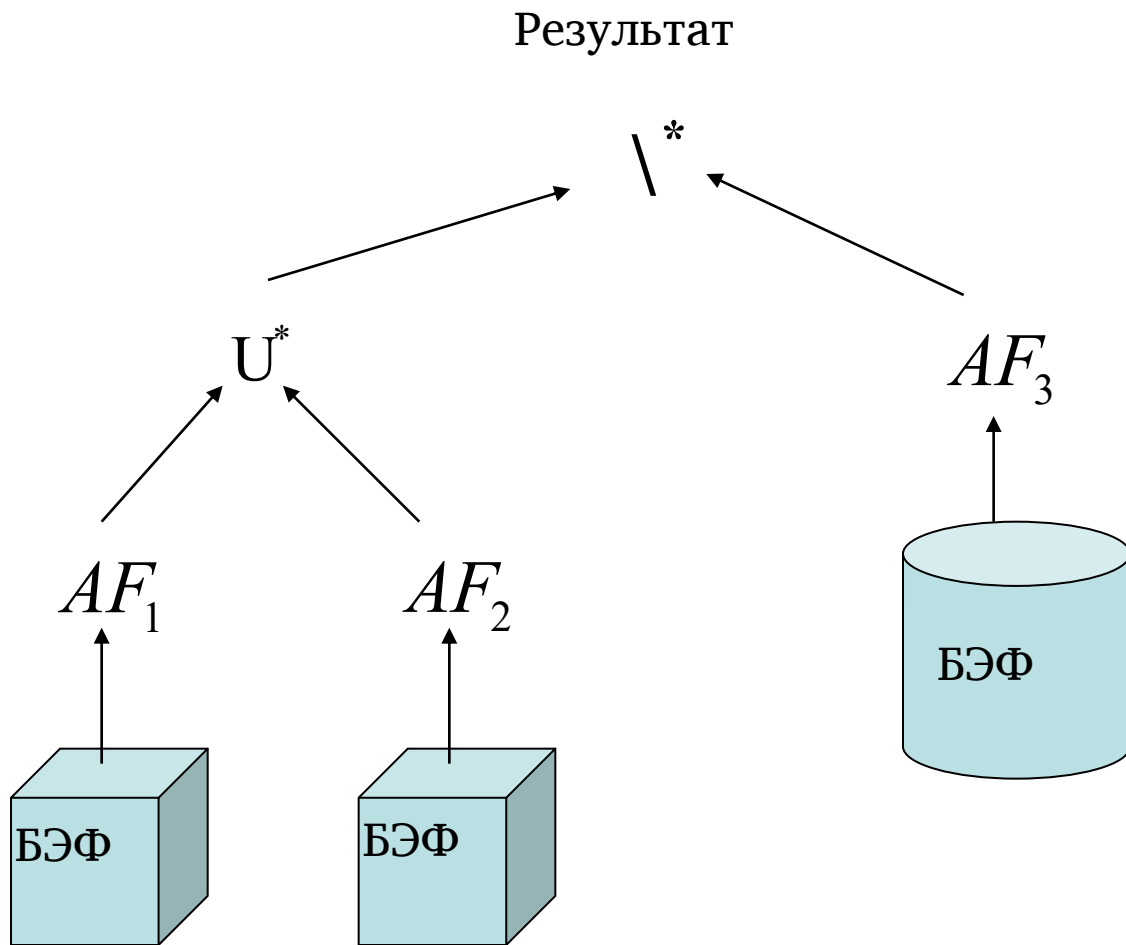
Формовка, растяжение, скручивание и т.п. Это достаточно приемлемая и эффективная методика конструирования естественных форм. Pentland построил достаточно точную модель человеческой головы, составленную из всего 13 примитивов – менее 100 байтов. А все тело человека было описано менее 300-ми байтами.

Конструирование тел (Solid modeling)

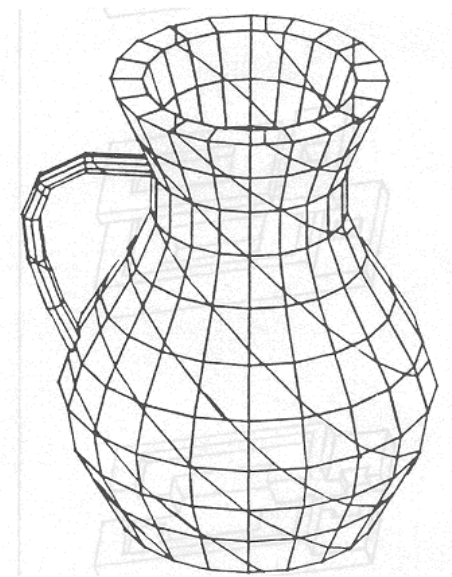
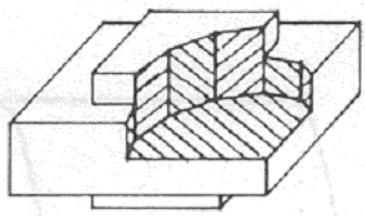
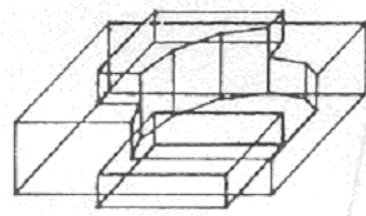
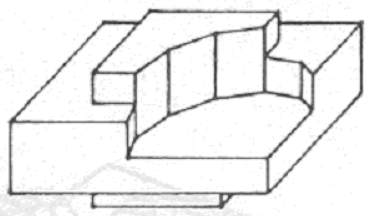
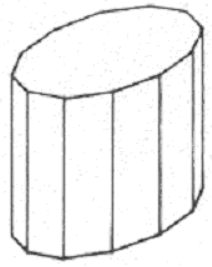
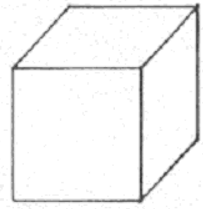
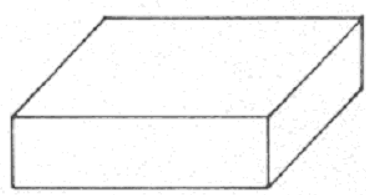
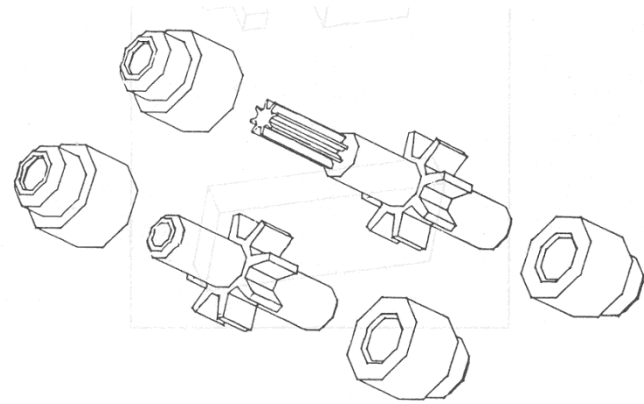
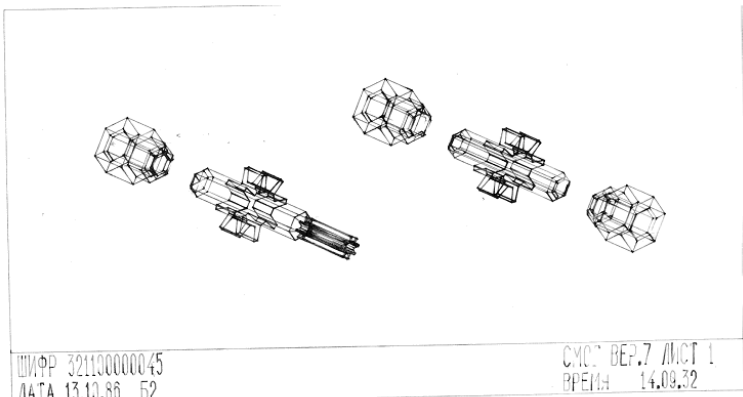
- Граничные представления (B-reps, boundary representation)
- Voxel (представление объема в виде объединения кубиков)
- CSG (Constructive solid geometry, моделирование твердого тела на теоретико-множественном уровне). При решении задачи CSG строится алгебра над объектами. Задаются базисные элементы-формы (шар, куб, пирамида и т.д.) и иерархический сценарий построения объекта
- F-reps (Functional representation)

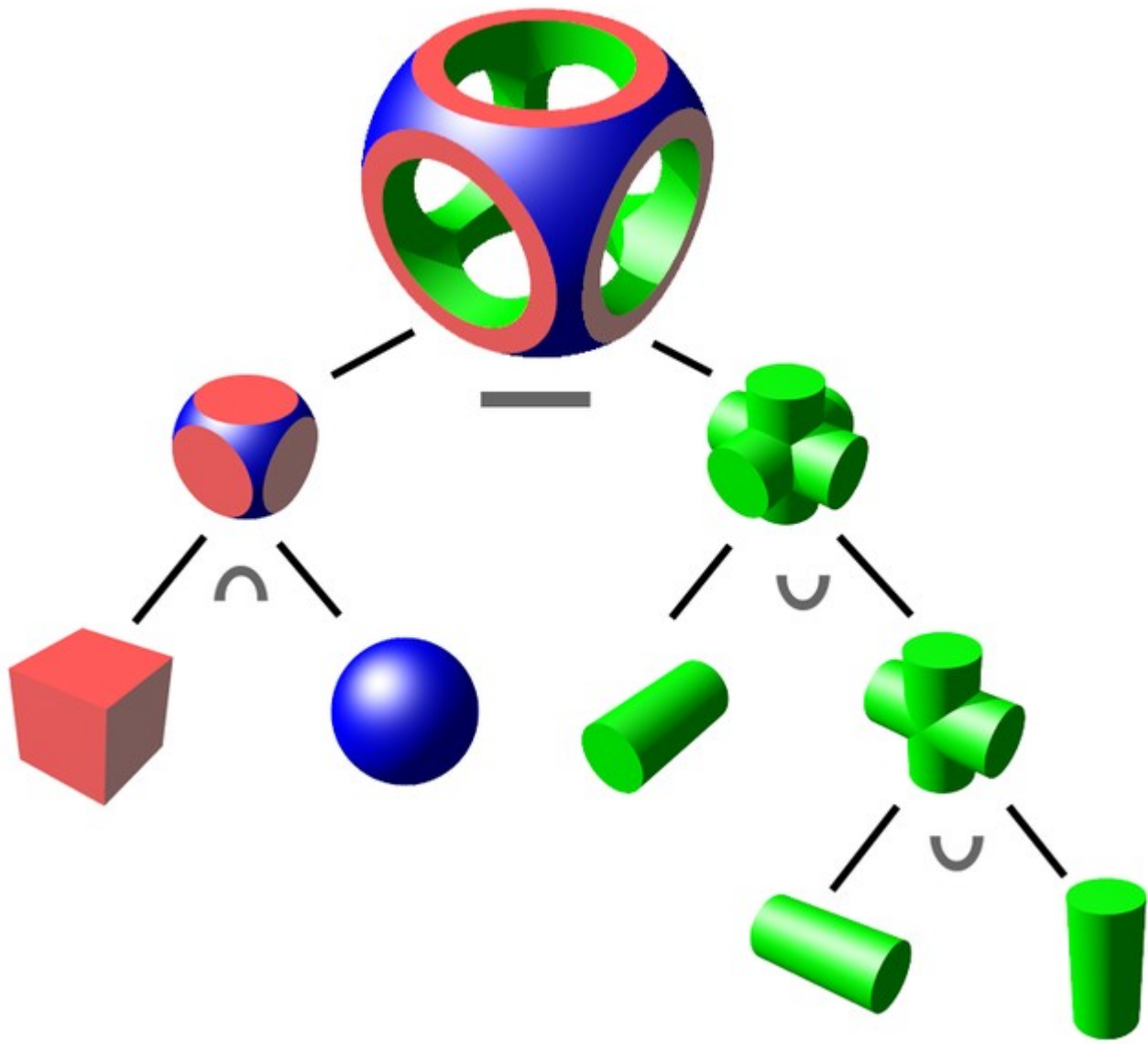


$$f(x, y, z) \begin{cases} > 0 \\ = 0 \\ < 0 \end{cases}$$



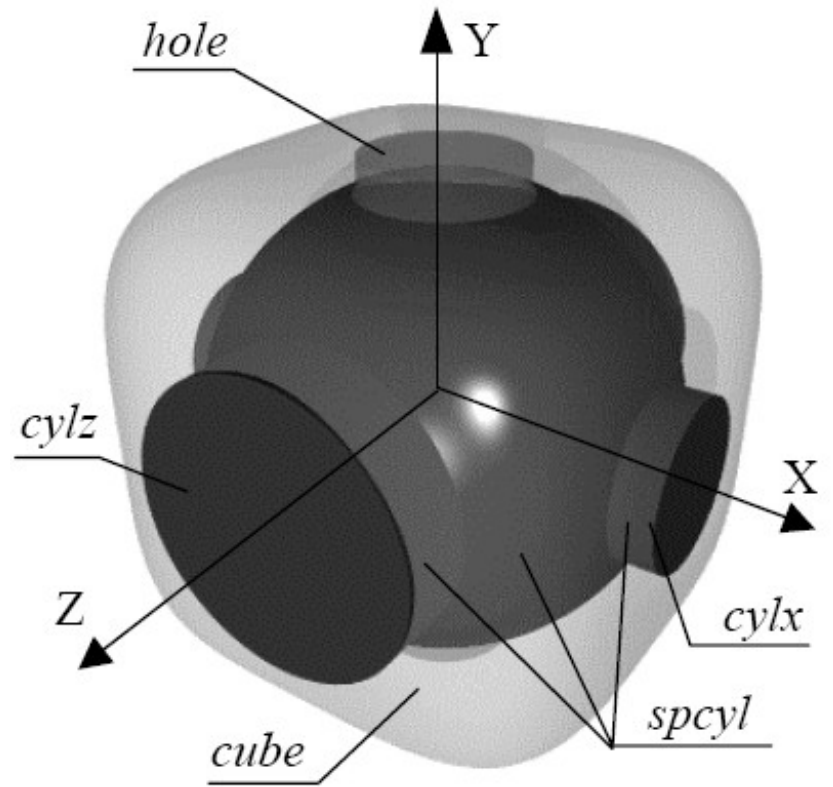
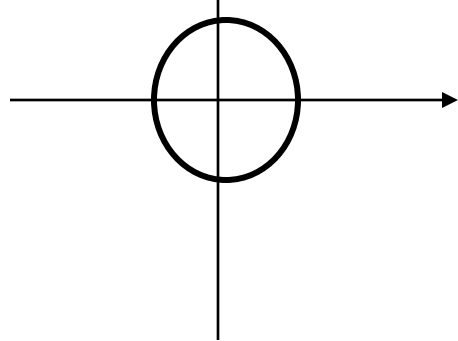
Базовые элементы формы



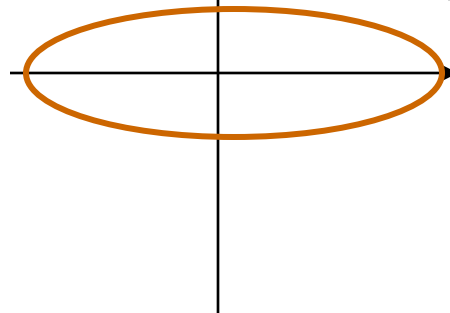


F-reps

$$f(r) = 1 - x^2 - y^2$$



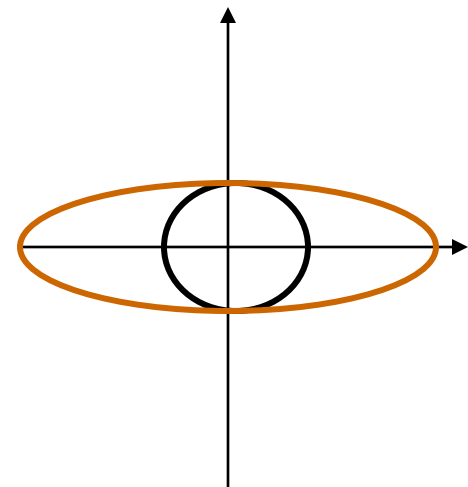
$$g(r) = 1 - x^2 - \frac{y^2}{4}$$

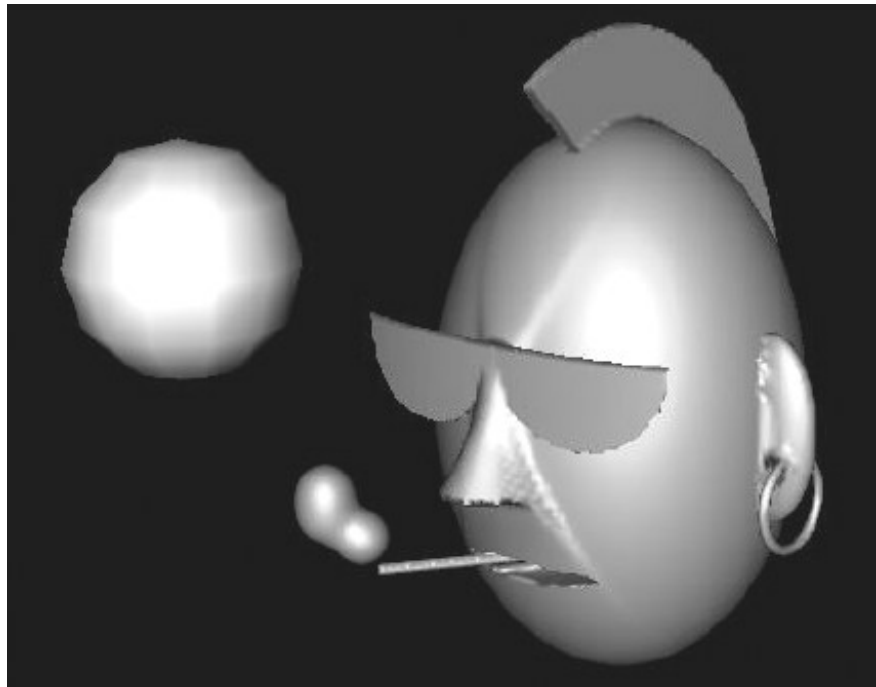
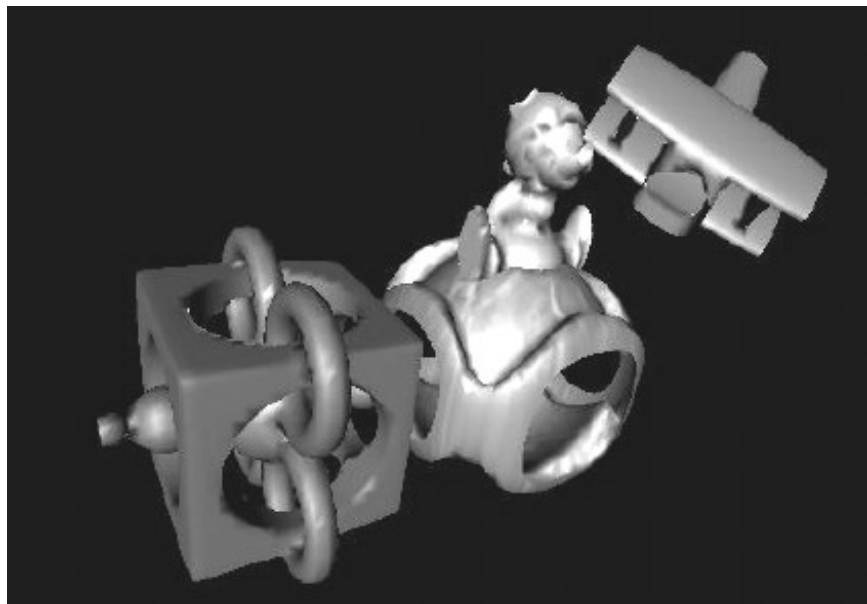


$$O_f \cap O_g \Rightarrow f + g - \sqrt{f^2 + g^2}$$

$$O_f \cup O_g \Rightarrow f + g + \sqrt{f^2 + g^2}$$

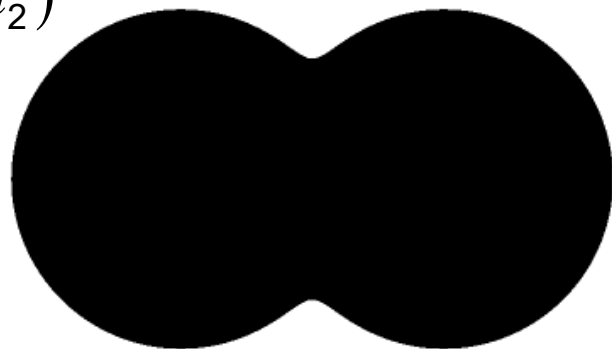
$$R^n \setminus O_f \Rightarrow -f$$





$$f_1 | f_2 = f_1 + f_2 + \sqrt{f_1^2 + f_2^2} + \frac{\alpha}{1 + (f_1/a_1)^2 + (f_2/a_2)^2}$$

$$f_1 \& f_2 = f_1 + f_2 - \sqrt{f_1^2 + f_2^2} + \frac{\alpha}{1 + (f_1/a_1)^2 + (f_2/a_2)^2}$$



Пространственные деформации

- Z-taper
- Выровнять объект вдоль оси Z
- Применить масштабирующую функцию, зависящую от z
- Применение линейного Z-taper к цилиндру дает конус

$$x' = (kz + l)x$$

$$y' = (kz + l)y$$

$$z' = z$$

$$x' = f(z)x$$

$$y' = f(z)y$$

$$z' = z$$

Пространственные деформации

- Z-twist
- Выровнять объект по отношению к оси Z
- Вращать объект вокруг оси Z на угол, являющийся функцией z

$$\theta = f(z)$$

$$x' = x \cos(\theta) - y \sin(\theta)$$

$$y' = x \sin(\theta) + y \cos(\theta)$$

$$z' = z$$

В отличие от однородных преобразований их нельзя свернуть в единую формулу или матрицу